XXXIII Tartu (2005) — lahendused

1. Nöör

Olgu nööri joontihedus ρ. Kasutame vertikaalset x-telge, kusjuures $x = 0$ vastab nööri vabale otsale. Siis nööri pinge on $T = \rho g x$. Olgu nööri kõrvalekalle tasakaaluasendist $y(x)$. Siis nöörielemendi kaldenurk (eeldusel, et see on väike) on y' ning nööripinge horisontaalkomponent $T_x = Ty' = \rho g x y'$. Nööritükeile pikkusega dx mõjub horisontaalsuunaline resultantjõud $dF = T'_x \cdot dx = \rho g[xy(x)]'dx = \ddot{y}\rho dx$. Omavõnkumise jaoks, mille sagedus on ω võime kirjutada $\ddot{y} = -\omega^2 y$, seega

$$g[xy(x)']' + \omega^2 y = 0 \Rightarrow [4\xi y(\xi)']' + y = 0,$$

kus $\xi = 4x\omega^2/g$. Antud võrrandi punktis $\xi = 0$ lõplik lahend on $J_0(\sqrt{\xi})$, st

$$y(x) = y_0 J_0(2\omega\sqrt{x/g}).$$

Piiritingimusest $y(l) = 0$ saame $2\omega\sqrt{l/g} = j_0$, millest

$$\omega = \frac{j_0}{2}\sqrt{g/l} \approx 1.202\sqrt{g/l}.$$

2. Kondensaatorid

Kasutame sama meetodit, mille abil leitakse lõpmatu ruudukujulise võre kahe naabersõlme vaheline takistus, rakendades seda vahelduvvoolu jaoks ja arvestades, et kondensaatori impedans $Z = 1/iC\omega$. Seega vaatleme esiteks voolu I_0, mis suunatakse punkti A ja mis voolab välja lõpmatuses. Sümmeetria põhjal jaguneb see esmalt kolme suuna vahel ja seejärel veel kahe suuna vahel, kõik voolud on samas faasis. Seejärel vaatleme voolu $-I_0$, mis on suunatud punkti B ning lõpuks kahe voolu superpositsiooni. Superpositsiooni korral on kummaski punkti A ja B eraldavas kondensaatoris voolutugevus $I = \frac{I_0}{3} + \frac{I_0}{6} = \frac{1}{2}I_0$. Niisiis on pinge $U = 2IZ = I_0 Z = I_0/i\omega C_{AB}$, millest $C_{AB} = C$.

3. Ketas

Kettal säilib energia (taandatud poole massiga) $K = v_\perp^2 + v_{||}^2$ ja impulsimoment vaia suhtes $L = \frac{3}{2}v_{||}R + v_\perp l = 11{,}5 v_0 R$. Siinjuures $v_\perp$ ja $v_{||}$ tähistavad nööriga ristuvat ja paralleelset kiiruskomponenti, mis mõlemad on alghetkel positiivsed. Nööri pinge on võrdeline ketta nurkkiirendusega, mis omakorda on võrdeline suurusega $-\dot{v}_{||}$; seega on nöör pingul seni, kuni $-\dot{v}_{||} \geq 0$ ning katkeb siis, kui $-\dot{v}_{||} \to \infty$. Diferentseerides jäävusseadusi saame

$$v_\perp \dot{v}_\perp = -v_{||}\dot{v}_{||},$$

$$3R\dot{v}_{||} + 2l\dot{v}_\perp = 2v_{||}v_\perp.$$

Siinokhal arvestasime, et $\dot{l} = v_{||}$. Siit on lihtne tuletada

$$3R\dot{v}_{||} - 2lv_{||}\dot{v}_{||}/v_\perp = 2v_{||}v_\perp,$$

millest

$$-\dot{v}_{||} = 2v_{||}v_\perp/(2lv_{||}/v_\perp - 3R).$$

Esiteks paneme tähele, et alguses on vaadeldav suurus tõepoolest positiivne, sest $2lv_{||}/v_\perp > 3R$. Edasi hakkab $v_{||}$ kahanema (samal ajal kui $v_\perp$ enrgia jäävusest johtuvalt kasvab) ja saavutab väärtuse $v_{||} = \frac{3}{2}\frac{R}{l}v_\perp > 0$ (mil nöör katkeb) enne, kui ta lõtvuks, sest lõtvumine toimuks siis, kui $\dot{v}_{||} = 0$, st $v_{||}$ peaks kahanema nullini. Asendades avaldise $v_{||} = \frac{3}{2}\frac{R}{l}v_\perp$ jäävusseadustesse leiame, et

$$v_\perp^2\left(1 + \frac{9}{4}\frac{R^2}{l^2}\right) = 2v_0^2, \quad v_\perp l\left(1 + \frac{9}{4}\frac{R^2}{l^2}\right) = 11{,}5 v_0 R.$$

Siit saame $4l^2 + 9R^2 = 11{,}5^2 R^2$ ning seega $l = \sqrt{493}R/4 \approx 5{,}55R$.

4. Veetilk *(10 punkti)*

Tasakaal on stabiilne, kui molekulide aurumise korral tilgalt rõhk õõnsuses kasvab kiiremini kui tilgaga tasakaalus oleva auru rõhk ja vastupidi, kondenseerumisel õõnsuse aururõhk kahaneb kiiremini kui tilga aururõhk.

Tasakaalulise rõhu leidmiseks tilga pinna kohal paneme tähele, et kui molekul peab vedelikust väljumiseks ületama energeetilise barjääri U, siis küllastunud auru rõhk $p \propto e^{-U/kT}$. Kui pinna väikesest kõverusraadiusest tingituna energeetiline barjäär kahaneb ΔU võrra, siis logaritmiliselt diferentseerides leiame rõhu muutuse: $\frac{\Delta p}{p_\infty} = \frac{\Delta U}{kT}$. Kui raadiuse r juures on pinna energia $W = 4\pi\sigma r^2$, siis aurustumisel raadiuse kahanedes Δr-i võrra muutub energia $\Delta W = 8\pi\sigma r\Delta r$-i võrra. Raadiuse muutus ja aurustunud molekulide arv ΔN on seotud valemiga $4\pi r^2\Delta r\rho = \frac{\Delta N}{N_A}\mu$, kus $\mu = 18\,\mathrm{g/mol}$ on vee molaarmass. Seega $\Delta U = \frac{\Delta W}{\Delta N} = \frac{2\sigma\mu}{N_A r\rho}$. Asendades rõhu muutuse avaldisse leiame $\Delta p = p_\infty\frac{2\sigma\mu}{Rr\rho T}$. *Märkus:* seda valemit tuntakse Kelvini valemi nime all.

Niisiis on rõhk õõnsuses $p = p_\infty(1 + \frac{2\sigma\mu}{Rr\rho T})$. Kui aurustumise tulemusel tilga raadius väheneb Δr-i võrra, siis tasakaalulise rõhu muut on $\Delta p_t = \frac{dp}{dr}\Delta r = p_\infty\frac{2\sigma\mu}{Rr^2\rho T}\Delta r$. Teisest küljest, aurustunud vesi suurendab auru massi $\Delta m = 4\pi r^2\Delta r\rho$ võrra, mis viib auru rõhu kasvule $\Delta p = \frac{\delta m}{\mu V}RT = 4\pi r^2\Delta r\rho RT/\mu V$. Kui see kasv on väiksem, kui Δp_t, siis aurustumine jätkub, st olukord on ebastabiilne. Stabiilsuse tingimus: $p_\infty\frac{2\sigma\mu}{Rr^2\rho T} < 4\pi r^2\rho RT/\mu V$, millest $V < \frac{2\pi}{\sigma p_\infty}(r^2\rho RT/\mu)^2 \approx 8\,\mathrm{cm}^3$

5. Seebimull *(10 punkti)*

Entroopia muut koosneb ruumalalise ja pinnaga seotud entroopia juurdekasvust. Ruumalalise entroopia juurdekasv: kvaasistaatilise protsessi korral termodünaamika esimesest ja teisest seadusest

$$T \cdot dS = dU + p \cdot dV.$$

Ideaalse gaasi isotermilise protsessi korral $dU = 0$. Ideaalse gaasi seadusest $p' = p'_0 V_0/V$, niisiis

$$S_V = \int_{V_0}^{V_1} p'_0 T V_0 d\ln V = 3\left(p_0 + 4\frac{\sigma}{r}\right)TV_0\ln 2.$$

Siinjuures algruumala $V_0 = \frac{4}{3}\pi r^3$, lõppruumala $V_1 = 8V_0$ ja algrõhk mulli sees $p'_0 = p_0 + 2\cdot 2\sigma/r$ (kus tegur 2 on tingitud sellest, et kilel on kaks poolt). Pinnaga seotud entroopia juurdekasvu leidmiseks paneme tähele, et $dS_S = \frac{dQ}{T} = \frac{q\cdot ds}{T}$, kus ds on pindala diferentsiaal. Et $\Delta s = 2\cdot 4\pi(4r^2 - r^2) = 24\pi r^2$ (kus tegur 2 on tingitud sellest, et kilel on kaks poolt), siis $S_S = 24\pi q r^2/T$. Tehes asendused saame lõpliku tulemuse

$$S = 4\pi r^3 T\left[\left(p_0 + 4\frac{\sigma}{r}\right)\ln 2 + \frac{6q}{r}\right].$$

6. Laser

Et valgusimpulss on väga lühike, siis igasuguse sellise kandva sageduse puhul, mis jääb nähtavasse spektriossa, sisaldab tema kiirgus ka monokromaatori sagedust c/λ_0 (tulenevalt määramatuse printsiibist). Seega väljub monokromaatorist D-dubletile vastav kollane valgus. Et monokromaator laseb läbi kitsa spektrivahemiku $\delta\lambda$, siis impulsi kestvus pikeneb märgatavalt: määramatuse printsiibist saame, et $\lambda_0/cT \sim \delta\lambda/\lambda_0$, millest $T \sim \lambda_0^2/c\delta\lambda$. Suuruse $\delta\lambda$ leiame tingimusest $\Delta(na) = a\frac{dn}{d\lambda}\delta\lambda = \lambda$, niisiis $\delta\lambda = \lambda/a\frac{dn}{d\lambda}$. Asendades $\delta\lambda$ eelpoolsaadud avaldisse saame lõplikult $T \sim \frac{a}{c}\frac{dn}{d\lambda}\lambda_0 \approx 25\,\mathrm{ps}$.

7. Ferromagneetikud magnetväljas

(a) Et magnetinduktsiooni ristkomponent on pidev, siis ketaste keskmes on magnetväli ligikaudu B (molekulaarne ringvool mööda ketta ääri mõjutab nõrgalt, sest $d/r \ll 1$). Niisiis $J = B/\mu_0$.

(b) Et magnetvälja tugevuse tagentsiaalkomponent on pidev, siis ketta külgpinna lähedal, väljaspool silindrit on induktisoon B_v suurusjärgus $B/\mu\mu_0$, st väga väike. See on molekulaarse pindvoolu tekitatud induktsiooni B_m ja välise magnetvälja induktsiooni superpositsioon: $B_m \approx -B$. Teisele poole pindvoolu muutub pindvoolu tekitatud magnetvälja märk vastupidiseks, mistõttu induktsioon külgpinna lähedal ketta sees on $B - B_m = 2B$. Järelikult $J = 2B/\mu_0$.

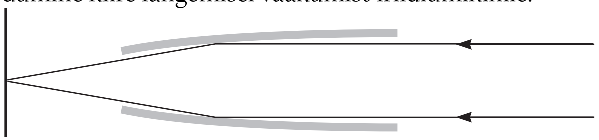
(c) Vastasmõju hindame kui kahe ringvoolu vahel toimivat Ampéri jõudu: $F \sim (2\pi r) \cdot \mu_0 I^2/2\pi d = r\mu_0 I^2/d$, kus $I \sim \frac{B}{\mu_0} d$. Kokkuvõtvalt, $F \sim rdB^2/\mu_0 \approx 800$ N.

8. Ahelreaktsioon

Kontrollime, kui kaua on tüüpiliselt vaja oodata esimese spontaanse neutroni tekkimist: $T_s \sim T/N$, kus $N = N_A m_c/\mu$ on aatomite arv ja $T \approx 6 \cdot 10^{24}$ s. Seega $T_s \sim T\mu/N_A m_c \approx 0{,}05$ s. Teisest küljest, ahelreaktsiooni välja kujunemiseks (plahvatuseks) kuluvat aega saab hinnata, kui aine raadius r jagatud neutroni kiirusega v_n. Siinkohal pole vaja arvutusi läbi viiagi mõistmaks, et $r/v \ll 0{,}05$ s. Et plahvatust vältida, ei tohiks kriitiline mass koos viibida kauem, kui r/v. Samas, nii kiiresti pole lootustki saada spontaanseid neutrone. Seega, projekt ei ole realistlik.

9. Röntgenteleskoop

(a) Visandi tegemisel paneme tähele, et murdumisnäitaja on röntgenkiirguse jaoks väiksem ühest. Seega toimub täielik sisepeegeldumine kiire langemisel vaakumist iriidiumikihile.



Konarused ei tohiks ületada murdosa lainepikkusest: $\lambda = c/\nu = ch/E \approx 0{,}6$ Å. See on ilmselt ebareaalne täpsus, tänu sellele, et langemisnurk ning murdumisnäitaja on hästi väiksed ning toimib efektiivselt keskmistumine üle aatomite, aitab reaalsuses ka umbes nanomeetrisest täpsusest.

(b) Tuleb leida elektronide pilve dielektriline läbitavus funktsioonina elektrivälja $E = E_0 \exp(i\omega t)$ ringsagedusest ω. Elektrone võib vaadelda vabade osakestena (ruumtihedusega $n = \frac{\rho}{\mu} N_A Z$): $m_e \ddot{x} = -E_0 e \exp(i\omega t)$, millest $x = Eem_e^{-1}\omega^{-2}$. Kui elektronid nihkuvad fooni (ioonide) suhtes kaugusele x, siis moodustub plaatkondensaator laengu pindtihedusega $\sigma = -nex$, mis tekitab välja $E_i = -nex/\varepsilon_0 = -(\omega_p/\omega)^2 E_0 \exp(i\omega t)$, kus $\omega_p^2 = ne^2/m_e\varepsilon_0$ (suurust ω_p nimetatakse elektronide plasmasageduseks). Siit on juba lihtne avaldada $\varepsilon = (E + E_i)/E = 1 - (\omega_p/\omega)^2$.

Sisepeegeldumise tingimus on $\cos\theta \approx 1 - \theta^2/2 \geq 1 - (\omega_p/\omega)^2$, millest $\theta \leq \sqrt{2}\omega_p/\omega = \hbar\sqrt{2ne^2/m_e\varepsilon_0}/E$ Avaldades kvandi energia $E = eU$ elektroni kiirendava pinge U abil võime saadud valemi ümber kirjutada kujul

$$\theta \leq \frac{\hbar U^{-1}}{\sqrt{m_e m_p \varepsilon_0}} \sqrt{2\rho \frac{Z}{A}}.$$

Asendades arvud leiame $\theta \leq 6 \cdot 10^{-3}$ rad$\approx 0{,}35°$.

10. Metallkuulid

(a) Kogu potentsiaalse energia muut läheb kineetiliseks energiaks. Õigupoolest tuleks tõestada, et kahe kuuli kokkupuutel ei toimu sädelahendust. Selleks paneme tähele, et kahe hästi lähedal asuva (kuid mitte kontaktis oleva) metallkuuli kui kondensaatori mahtuvus läheneb lõpmatusele võrdeliselt pindade vahelise kauguse logaritmiga (selle mahtuvuse võime leida kui paralleelselt ühendatud kitsaste rõnga-kujuliste kondensaatorite mahtuvuste dC summa; plaadi selle osa pindala, mis on lähemal kui x, avaldub kuhul $S = 2\pi x R$, millest $dS = 2\pi R \cdot dx$ ning $C = \int dC = \int \varepsilon_0 x^{-1} dS \to \infty$). Niisiis,

$$2\frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{Q^2}{C_0} - \frac{Q^2}{2C_0}\right),$$

kus $C_0 = 4\pi\varepsilon_0 R$ on kera mahtuvus ja $2C_0$ on kahe kaugel asuva samapotentsiaalilise kera mahtuvus. Seega

$$v = \frac{Q}{4\sqrt{\pi\varepsilon_0 Rm}}.$$

(b) Meil tuleb leida kahe kontaktis oleva kera mahtuvus C. Leiame selle elektriliste kujutiste meetodil. Olgu kummagi kera keskel laeng q_0 nin kaugustel x_i, $i = 1, 2, \ldots$ kerade kontaktpunktist laengud q_i. On lihtne näha, et kerade pindade ekvipotentsiaalsus on rahuldatud, kui

$$R - x_i = \frac{R^2}{R + x_{i-1}}, \quad q_i = -q_{i-1}\frac{R}{R + x_{i-1}}.$$

Nendest rekurrentsetest seostest on lihtne saada

$$x_i = R/(i+1), \quad q_i = (-1)^i q_0/(i+1).$$

Kera pinna potentsiaali leidmisel paneme tähele, et kõikide teiste virtuaalsete laengute panused taanduvad paarikaupa välja, peale kera enda keskes oleva laengu q_0. Seega $\varphi = q_0/4\pi\varepsilon_0$. Süsteemi summarse laengu leiame järgmiselt: $q = 2\sum_i (-1)^i q_0/(i+1) = 2q_0 \ln 2$, sest vaadeldav summa kujutab endast $\ln(1+x)$ astmerida punktis $x = 1$. Otsitav mahtuvus

$$C = q/\varphi = C_0 \ln 4 = 8\pi \ln 2 \cdot \varepsilon_0 R.$$

Peale plastset põrget on kerade kiirus null, seega

$$2\frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{Q^2}{C} - \frac{Q^2}{2C_0}\right),$$

millest

$$v = \frac{Q}{\sqrt{8\pi\varepsilon_0 Rm}}\sqrt{\ln^{-1} 2 - 1}.$$