AKADEEMILINE FÜÜSIKAOLÜMPIAAD 2008

Lahendused

1. Asteroid. Maa peal suudab inimene hüpata umbes poole meetri kõrgusele (st inimese masskese kerkib $0{,}5\,\mathrm{m}$ võrra). Seega inimene teeb maksimaalse pingutusega üles hüpates tööd mgh, mis muutub keha kineetiliseks energiaks. Et asteroidist vabaneda, peab see energia olema suurem kui inimese ja asteroidi gravitatsioonilise vastasmõju seoseenergia, mis on

$$E = \frac{GMm}{R} = \frac{4}{3}\pi GmR^2\rho,$$

kus M on asteroidi mass ja R – selle raadius. Seega piirjuhul $mgh = E$, millest

$$R = \sqrt{\frac{3gh}{4\pi G\rho}} \approx 2{,}4\,\mathrm{km}.$$

2. Silindervõre. Maksimaalne käiguvahe kahe naaberjoone servast lähtuva kiire vahel on d (kui need tulevad vaataja suunas silindri puutujana). Sellele vastab difraktsioonijärk $n = \lfloor \frac{d}{\lambda} \rfloor$ (kus $\lfloor x \rfloor$ tähistab x-i täisosa). Arvestades, et difraktsioonipilte on näha mõlemal pool telge, saame lõplikuks vastuseks $N = 2\lfloor \frac{d}{\lambda} \rfloor + 1$.

3. Faasinihe. Olgu ahela impedanss Z. Siis kujutab antud ahel endast L ja Z järjestikühendust, mis on rööbiti C-ga, st

$$Z^{-1} = iC\omega + (iL\omega + Z)^{-1}.$$

Selle võrrandi saab ümber kirjutada kujul

$$iC\omega Z^2 - CL\omega^2 Z - iL\omega = 0.$$

Tuues sisse tähise $\alpha = CL\omega^2$ võime lahendi kirjutada kujul

$$Z = \frac{i\alpha \pm \sqrt{\alpha(4-\alpha)}}{C\omega}.$$

Niisiis, kui $CL\omega^2 \geq 4$, siis $\varphi = \frac{\pi}{2}$; vastasel korral

$$\varphi = \arctan\sqrt{\frac{\alpha}{4-\alpha}}.$$

4. Luminestseeruv kile. Lahendus

Kilest pääseb välja valgus, mille langemisnurk kile pinnale (seestpoolt) on väiksem täieliku sisepeegeldumise piirnurgast $\theta_0 = \arcsin(1/n)$ — enamus otse, väiksem osa pärast paarikordset peegeldumist kile pinnalt. Kiirguse isotroopsuse tõttu on selle kiirguse võimsus pinnaühiku kohta (intensiivsus) $I_L = I_0(1-\cos\theta_0)$, kus I_0 on koguvõimsus (ruuminurga element $d\Omega = \sin\theta d\varphi d\theta$). Täieliku sisepeegeldumise tõttu kilesse "vangi" jäänud kiirgus neeldub, muundub soojuseks ja väljub soojuslikus tasakaalus kilest soojuskiirgusena, mille intensiivsus $I_T = I_0\cos\theta_0$. Siit

$$I_T = \frac{I_L\cos\theta_0}{(1-\cos\theta_0)} = \frac{I_L\sqrt{n^2-1}}{n-\sqrt{n^2-1}}.$$

Temperatuuril T oleva keha soojuskiirguse võimusus pinnaühiku kohta $I_T \leq \sigma T^4$ (võrdus kehtib absoluutselt musta keha jaoks), kus $\sigma = 5{,}67\times 10^{-8}\,\mathrm{J\cdot s^{-1}\cdot m^{-2}\cdot K^{-4}}$ on Stefan-Boltzmani konstant, millest

$$T \geq \left[\frac{I_L\sqrt{n^2-1}}{\sigma\left(n-\sqrt{n^2-1}\right)}\right]^{1/4} = 270\,\mathrm{K}$$

Vastus: kile temperatuur on vähemalt 270 K.

5. Nöör. Hindame elektrostaatilist tõukejõudu F nööri keskpunktis kahe nööripoole vahel. Esitame selle kujul

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{L/2} dq \int_0^{L/2} dq' \cdot (x+y)^{-2},$$

kus y mõõdab parempoolse nööriosa punkti kaugust kespunktist ja x on vastav suurus vasema nööripoole jaoks. Kui $x + y \gg r$, siis $dq = \alpha dx$ ja $dq' = \alpha dy$. Hindamise jaoks saame piisava täpsuse, kui rakendame antud seoseid $x + y \geq r$ jaoks ja ignoreerime piirkonna $x < r$ panust. Tõepoolest, selle piirkonna puhul tuleb arvestada laengute ruumilise jaotusega nööril ning seda silmas pidades on suhteliselt lihtne näha, et antud piirkonna panus vaadeldavasse integraali ei ületa suurusjärgu poolest piirkonna $r < x,y < 2r$ panust (mida me korralikult arvestame). Niisiis,

$$F \approx \frac{\alpha^2}{4\pi\epsilon_0}\int_r^{L/2} dx \int_r^{L/2} dy \cdot (x+y)^{-2} \approx \frac{\alpha^2}{4\pi\epsilon_0}\ln(L/r),$$

seega

$$L \approx re^{4\pi\epsilon_0 T\alpha^{-2}}.$$

6. Nöör-II. Tähistagu u kuuli kiiruse seda komponenti, mis on nööriga risti. Sellisel juhul impulsimomendi jäävuse seadusest $ur = vR$, kus r on kuuli hetkekaugus august. Seega $u = v\frac{R}{r}$. Vastuse leiame energia jäävuse seadusest arvestades, et otsitaval hektel on kuuli kiirus risti nööriga ning seega kuuli kiirus võrdne u-ga:

$$2mg(R-r) + mv^2 = mv^2\left(\frac{R}{r}\right)^2.$$

Saadud kuupvõrrandi võime läbi jagada meid mitte-huvitava teguriga $r - R$:

$$2gr^2 = v^2(R+r).$$

Seega saame vastuseks ainsa positiivse lahendi

$$r = \frac{v^2}{4g}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{8gR}{v^2}}\right).$$

7. Mustad augud. Asendades $A = 4\pi r_h^2$ entroopia avaldisse saame $S = 4\pi kGM^2/\hbar c$. Temperatuuri leiame seosest $T = dS/dQ$, kus $dQ = c^2 dM$:

$$T_H = \frac{\hbar c^3}{8\pi kGM}.$$

Näeme, et temperatuur kasvab massi vähenemisel, st must auk on termodünaamiliselt ebastabiilne (soojuskiirgus vähendab massi, mis tõstab temperatuuri, mis viib veelgi kiiremale massikaotusele). Saame diferentsiaalvõrrandi

$$c^2 dM = -\sigma\left(\frac{\hbar c^3}{8\pi kGM}\right)^4 \cdot 4\pi\left(\frac{2GM}{c^2}\right)^2 dt.$$

Selle integreerimisel jõuame tulemuseni

$$t = \left(\frac{4\pi k}{\hbar c}\right)^4 \frac{G^2}{\pi\sigma c^2}M^3 \sim 10^{67}\,\text{aastat}.$$

8. Seib. Magnetväli moodustab seibi ja tasandi vahel radiaalselt hargnevate jõujoontega pildi, kusjuures kaugusel l süsteemi sümmeetriateljest $B = B_0 r/l$. Magnetvoog läbi seibi on seega $\Phi = 2\pi r d B_0$. Et magnetvoog läbi ülijuhtiva kontuuri ei muutu, siis magnetvoog peab olema selline, nagu alguses: $\Phi = IL$. Niisiis magntväli seibi siseserva juures $B_0 = \Phi/2\pi rd = IL/2\pi rd$ ja mujal tasandi ja seibi vahel

$$B = IL/2\pi ld.$$

Magnetvälja energia

$$E = \int_r^R \frac{B^2}{2\mu_0}\cdot 2\pi ld\cdot dl = \frac{I^2L^2}{4\pi d\mu_0}\int_r^R \frac{dl}{l} = \frac{I^2L^2}{4\pi d\mu_0}\ln\frac{R}{r}.$$

Jõud on selle tuletis pilu laiuse d järgi, st

$$F = \frac{I^2L^2}{4\pi d^2\mu_0}\ln\frac{R}{r}.$$

9. Kristall. Graafiku lähem vaatlus näitab, et keskosas on lineaarne lõik, mis vastab astmeseadusele $C \propto T^3$; vasakus servas (umbes $T_1 = e^{-\frac{3}{2}}T_0$ juures) toimub kiire kahanemine, mis on seletatav sellega, et selle kristalli madalaima sagedusega omavõnkumine ei ergastu. Niisiis $\hbar\omega_0 \approx kT_1 \approx 0{,}22kT_0$, kus $\omega_0 = \sqrt{E/\rho}/2l$. Niisiis, kui teaksime pikkust l, siis saaksime $E = \rho(0{,}44lkT_0/\hbar)^2$. Teisest küljest toimub $T_2 \approx e^{\frac{5}{2}}T_0$ juures soojusmahtuvuse küllastumine, st siis on ergastunud ka kõige kõrgema sagedusega võnkumised. Küllastunud soojusmahtuvus on suhe soojusmahtuvusse temperatuuril T_1 annab võnkumise vabadusastmete arvu $(l/a)^3$ (õigemini küll kolm korda väiksema arvu, sest minimaalse energiaga võnkumisi on kuupvõre puhul kolm, igas kristallvõre telje sihis üks). Seega $(l/a)^3 \approx e^{10}/3$, st

$$l \approx 20a.$$

Nüüd jõuame ka vastuseni

$$E \approx \rho(9akT_0/\hbar)^2.$$