AKADEEMILINE FÜÜSIKAOLÜMPIAAD 2009
Lahendused

1. Pööripäevad. Andmete põhjal võib järeldada, et Maa asub talvisel pööripäeval ligikaudu ellipsi pikemal teljel. Kepleri II seaduse põhjal suhtuvad ajad nagu pindalad. Kevadist ja sügisest pööripäeva lahutavate perioodide vahe vastab seejuures ellipsi selle fragmendile, mis jääb ellipsi kahest fookusest tõmmatud lühema teljega paralleelsete sirgete vahele. Nende sirgete vahekaugus on $2\epsilon R$, kus ϵ tähistab ekstsentrilisust ja R — Maa orbiidi keskmist raadiust. Seega,

$$4\epsilon R^2/\pi R^2 \approx 7/365,$$

millest $\epsilon \approx 7\pi/1460 \approx 0{,}015$.

2. Fookus. Difraktsioon tingib fookustäpi laiali valgumise, laigu diameetriks on $\phi = 1{,}22\lambda/d$. Seega, fookuses on ala ristmõõtmeks (diameetriks) $\delta_\perp = 1{,}22\lambda f/d \approx 65\,\mu$m.

Pikisuunas mõõtmete hinnanguks võime kasutada tingimust, et geomeetrilise optika defokuseeritud ring oleks sama suur, kui difraktsiooniline ring, st $\delta_\| d/f \approx \delta_\perp = 1{,}22\lambda f/d$, millest $\delta_\| \approx 1{,}22\lambda f^2/d^2 \approx 6{,}5$ mm. Pikiläbimõõt on $2\delta_\| \approx 13$ mm.

Alternatiivseks $\delta_\|$ hindamiseks paneme tähele, et intensiivsus on vähenenud umbes kaks korda siis, kui kõige lühemat optilist teed pidi saabuvate ja kõige pikemat teed pidi saabuvate kiirte teepikkuste vahe on $\lambda/2$. Fookuses on need teepikkused võrdsed; väikesel kaugusel δ_perp, optilisel teljel, on piki telge saabubud kiir läbinud täiendavalt vahemaa $\delta_\|$, aga läätse servast saabunud kiir — vahemaa $\delta_\| \cos\alpha \approx \delta_\|(1-\alpha^2/2)$, kus $\tan\alpha = d/2f \approx \alpha$. Niisiis, $\delta_\|\alpha^2/2 \approx \delta_\| d^2/8f^2 \approx \lambda/2$, millest $\delta_\| \approx 4\lambda f^2/d^2 \approx 21$ mm.

Täpsema tulemuse saamiseks võib viimast meetodit edasi arendada ja arvutada elektrivälja vektori otsitavas punktis (teljel, fookusest kaugusel $\delta_\|$):

$$E \propto \int_0^\alpha e^{ik\delta_\|\beta^2/2}\beta d\beta \propto \sin(k\delta_\|\alpha^2/2)/k\delta_\|.$$

Võrdelisusteguri leiame normeerides tulemuse väärtusega $\alpha = 0$ juures, st

$$E = E_0\sin(\xi)/\xi = E_0/\sqrt{2}, \quad \xi \equiv k\delta_\|\alpha^2/2 = \pi\delta_\|\alpha^2/\lambda.$$

Saadud võrrandi lahendiks on $\xi \approx 1{,}3916$, st $\delta_\| \approx 1{,}3916\lambda/\pi\alpha^2 \approx 1{,}77\lambda f^2/d^2 \approx 9{,}4$ mm. Heleda täpi pikiläbimõõt on $2\delta_\| \approx 18{,}8$ mm.

3. Mikrolaineahi. Selleks, et lained saaksid levida, peab lainejuhi ristlõikesse mahtuma seisulaine. Selle lainevektori komponendid on $k_x = k_y = \pi/a$, kus $a = \sqrt{S}$; k_z võib olla suvaline, tema määrab laine levimise kiiruse lainejuhis, $v = d\omega/dk_z$. Et vaakumis leviva laine jaoks $(\omega/c)^2 = 4\pi^2 f^2/c^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = 2\pi^2/a^2 + k_z^2 \geq 2\pi^2/S$, siis

$$S \geq c^2/2f^2.$$

4. Elektronid. Adiabaatilise protsessi juures ei muutu entroopia, st süsteeme ei hõiva uusi kvantolekuid (olemasolevad kvantolekud tasapisi muutuvad, kuid nende hõivatus jääb endiseks). Algselt oli temperatuur liiga madal ergastamaks kõrgema energiaga tsüklotronorbiite. Madalaima ja järgmise nivoo energiate vahe on $\hbar B_0 e/m$ ning asustatuste suhe $p_1/p_0 = \exp(-\hbar B_0 e/mkT_0)$; see jääb samaks ka pärast magnetvälja vähenemist, st $p_1/p_0 = \exp(-\hbar B_0 e/mkT_0) = \exp(-\hbar B_1 e/mkT_\perp)$, millest

$$T_\perp = T_0 B_1/B_0.$$

Pärast temperatuuride ühtlustumist on ka tsüklotronliikumisega seotud vabadusaste täielikult ergastatud, st soojusmahtuvus molekuli kohta on kasvanud väärtuselt $\frac{1}{2}k$ väärtuseni $\frac{3}{2}k$, mistõttu $\frac{1}{2}kT_0 = \frac{3}{2}kT_1$, st

$$T_1 = \frac{1}{3}T_0.$$

5. Loik. Loigu pinnaelemedile mõjuv horisontaalsuunaline rõhumisjõud

$$\rho g x dx = -d(\sigma\sin\alpha),$$

kus $\sin\alpha = \frac{dy}{\sqrt{dx^2+dy^2}}$. Integreerimiskonstandi leidmisel arvestame, et loigu ülemise pinna juures $x = 0$ ning vedeliku pind on seal horsiontaalne, st $dx = 0$. Seega

$$\frac{\rho g x^2}{2\sigma} = 1 - \frac{dy}{\sqrt{dx^2+dy^2}}.$$

Muutes koordinaadid dimensioonituks suuruse $\lambda = \sqrt{\frac{2\sigma}{\rho g}}$ abil, st tähistades $\xi = x/\lambda$ ja $\eta = y/\lambda$, saame

$$(1-\xi^2)\sqrt{d\xi^2 + d\eta^2} = d\eta.$$

Selle võrrandi lahend on antud vihjena,

$$\eta = \sqrt{2-\xi^2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\text{arctanh}\sqrt{1-\xi^2/2},$$

mis tähendab, et

$$y = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}}\left(2\sqrt{1-\frac{x^2\rho g}{4\sigma}} - \text{arctanh}\sqrt{1-\frac{x^2\rho g}{4\sigma}}\right).$$

Selle funktsiooni tuletis läheb lõpmatusse punktides $x = 0$ ja $x = 2\sqrt{\sigma/\rho g}$, mis vastavad loigu ülemisele ja alumisele pinnale.

6. Vedru. $k = F/\Delta l$, kus F on venitav jõud, mis tingib vedru pikenemise Δl. Nüüd on vaja siduda väändemoment jõuga ja traadi pikenemine väändenurgaga. Traadi väändemoment $M = Fd/2$, millest $F = 2M/d$. $\Delta l = \phi d/2$, kus ϕ on traadi väändenurk. Niisiis $k = 4M/(\phi d^2) = 4\kappa/d^2$, kus $\kappa = M/\phi$ on traadi jäikustegur väändele. Analoogia põhjal vedrupendli võnkumisega võib torsioonvõnkumise perioodiks võtta $T = 2\pi\sqrt{I/\kappa}$. Ketta inertsimoment

$$I = \int r^2 dm = \int_0^R r^2\frac{m2\pi r dr}{\pi R^2} = \frac{2m}{R^2}\int_0^R r^3 dr = \frac{1}{2}mR^2.$$

Kokkuvõttes

$$k = \frac{8\pi^2 mR^2}{d^2T^2} = 12{,}3\,\text{N/m}.$$

7. Tsentrifuug. Projekteerides lühikesele nöörielemendile mõjuvad jõud (raskusjõud ja mõlemas otsas toimiv nööri pinge) nööri puutuja sihile näeme, et pinge niidis jaotub sama seaduse järele, nagu rõhk vedelikus: $dT = d(\frac{1}{2}\rho\omega^2 x^2)$, kus x on kaugus pöörlemisteljest. Niisiis,

$$\Delta T = \frac{1}{2}\rho\omega^2\left(x_1^2 - x_2^2\right).$$

Teisest küljest, pinge T_0 nööri keskpunktis saab leida kõverusraadiuse abil, projekteerides lühikesele nöörijupile mõjuvad jõud nööri ristsihile: $\alpha T_0 = (\alpha r\rho)\cdot\omega^2 R_1$, kus α on jupile vastav kesknurk. Niisiis, $T_0 = \rho\omega^2 rR_1$ ning seega pinge nööri otste juures (kus see on maksimaalne) on

$$T = \frac{1}{2}\rho\omega^2(2rR_1 + R_1^2 - R_0^2).$$

Siit saame avaldada pöörlemiskiiruse

$$\omega = \sqrt{\frac{2T}{\rho(2rR_1 + R_1^2 - R_0^2)}}.$$

8. WKB kvanttingimus. Integreerimisel läheb vaja järgmisi abivalemeid (kõikjal $X = ax^2 + bx + c$):

$\int\frac{X^{1/2}dx}{x} = X^{1/2} + \frac{b}{2}\int\frac{dx}{X^{1/2}} + c\int\frac{dx}{xX^{1/2}}$,

$\int\frac{dx}{X^{1/2}} = -\frac{1}{(-a)^{1/2}}\arcsin\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}}\right)$, kui $a < 0$ ja $b^2 > 4ac$,

$\int\frac{dx}{X^{1/2}} = \frac{1}{a^{1/2}}\ln\left|2(aX)^{1/2} + 2ax + b\right|$, kui $a > 0$,

$\int\frac{dx}{xX^{1/2}} = \frac{1}{(-c)^{1/2}}\arcsin\left(\frac{bx+2c}{|x|\sqrt{b^2-4ac}}\right)$, kui $c < 0$ ja $b^2 > 4ac$.

WKB tingimus Morse potentsiaalile. Tehes muutujavahetuse $y = e^{-\beta(r-R_e)}$, viime WKB integraali kujule

$$\begin{aligned} I_{WKB} &= \frac{a}{\pi}\int_{y_2}^{y_1}\frac{dy}{y}\sqrt{-y^2+2y+E_n/D-1} \\ &= \frac{a}{\pi}[X^{1/2}\,|_{y_2}^{y_1} + \int_{y_2}^{y_1}\frac{dy}{\sqrt{-y^2+2y+E_n/D-1}} \\ &+ (E_n/D-1)\int_{y_2}^{y_1}\frac{dy}{y\sqrt{-y^2+2y+E_n/D-1}}], \end{aligned}$$

kus $y_1 = y(R_1)$ ja $y_2 = y(R_2)$. Esimene liige nurksulgudes annab nulli, kuna tegu on pöördepunktidega. Kasutades toodud abivalemeid, saame

$$\int_{y_2}^{y_1} \frac{dy}{\sqrt{-y^2+2y+E_n/D-1}}$$

$$= \arcsin\left(\frac{1-y_2}{\sqrt{E_n/D}}\right) - \arcsin\left(\frac{1-y_1}{\sqrt{E_n/D}}\right) = \pi,$$

kus on arvesse võetud, et $y_1 - 1 = 1 - y_2 = \sqrt{E_n/D}$. Analoogiliselt, võttes arvesse, et $E_n/D - 1$, saame

$$\int_{y_2}^{y_1} \frac{dy}{y\sqrt{-y^2+2y+E_n/D-1}} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-E_n/D}}[\arcsin\left(\frac{y_1-1+E_n/D}{y_1\sqrt{E_n/D}}\right) - \arcsin\left(\frac{y_2-1+E_n/D}{y_2\sqrt{E_n/D}}\right)]$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{1-E_n/D}}.$$

Kokkuvõttes seega $I_{WKB} = a(1-\sqrt{1-E_n/D}) = x_n$. Siit on juba lihtne jõuda valemini $E_n = \frac{D}{a^2}x_n(2a-x_n)$, m.o.t.t.

RKR võrrand Morse potentsiaalile. Tehes muutujavahetuse $x = n' + 1/2$, viime lähtevõrrandi kujule

$$R_2(x_n) - R_1(x_n) = \frac{2}{\beta}\int_0^{x_n} \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 2ax + 2ax_n - x_n^2}}.$$

Integraali arvutamiseks kasutame kolmandat ülaltoodud abivalemit:

$$R_2 - R_1 = \frac{2}{\beta}\ln\left|\frac{a-x_n}{a-\sqrt{2ax_n - x_n^2}}\right|.$$

Kuna $a - x_n = a\sqrt{1-E_n/D}$ (vt eelmise tõestuse lõppu), saame siit

$$R_2 - R_1 = \frac{1}{\beta}\ln\left|\frac{1-E_n/D}{\left(1-\sqrt{E_n/D}\right)^2}\right| = \frac{1}{\beta}\ln\left(\frac{1+\sqrt{E_n/D}}{1-\sqrt{E_n/D}}\right),$$

mis suvalise $E < D$ jaoks on Morse potentsiaali puhul täpselt õige tulemus, nagu lihtne vahetult kontrollida.

9. Plasma. Magnetvälja jõujooned on lõpuks mässitud ümber telje nagu niit ümber pooli, täites kogu vaba ruumi (sest plasma rõhk on tühine võrreldes magnetvälja rõhuga). Samuti, plasma peab olema kvaasitasakaalus, st Ampère'i jõud peab olema peaaegu null, st voolutihedus plasmas peab olema peaaegu null, st magnetväli peab olema keerisevaba ja vähenema pöördvõrdeliselt kaugusega teljest: $B = B_0 r/x$, kus x on kaugus sümmetriateljest ja B_0 on induktsioon punktis $x = r$. N pöörde järel peab magnetvoog, mis läbib telje ja seina vahele jäävat vertikaalset plasma ristlõiget, olema võrdne $N\Phi_0$-ga, st $HrB_0 \ln R/r = N\Phi_0$, millest

$$B = rB_0/x = N\Phi_0/Hx\ln\frac{R}{r}.$$

Magnetvälja energia

$$W = \frac{1}{2\mu_0}\int 2\pi x dx HB^2 = \frac{\pi N^2\Phi_0^2}{H\mu_0\ln(R/r)}.$$

Teisest küljest, $dW = M \cdot 2\pi dN$, millest

$$M = \frac{dW}{2\pi dN} = \frac{N\Phi_0^2}{H\mu_0\ln(R/r)}.$$

Märkus: antud probleem modelleerib seda, kuidas evolutsioneerub magnetväli ja plasma neutrontähe ümber vahetult peale selle moodustumist (tähe kollapsi tulemusel). Nimelt, keskel täht pöörleb nii, nagu siin silinder. Kaugetes piirkondades peaksid magnetvälja jõujooned liikuma väga kiiresti; kui vaadelda piisavalt kaugeid piirkondi, siis kiiremini, kui valguse kiirus, mis on võimatu. Seega toimivad kauged piirkonnad nagu mittepöörlev sein antud ülesandes. Tulemuseks on plasma "välja uhtumine"neutrontähe lähedusest (nähtus, mida antud ülesandes me ei uurinud).