

Lahendused

1. Kumminiit (7 punkti) Kumminiidi pikenemine funktsiooni-na koordinaadist x , mis olgu defineeritud kui kaugus otspunktist venimata olekus, on leitav tingimusest $\varepsilon ES = \rho S_0 xg$, kus S ja S_0 on ristlõikepindalad vastavalt venitatud ja venimata olekus. Ruumala säilimise tõttu $(1 + \varepsilon)S = S_0$, st $\varepsilon E = \rho xg(1 + \varepsilon)$, millest

$$\varepsilon = \frac{\rho xg}{E - \rho xg} = \left(1 - \frac{\rho xg}{E}\right)^{-1} - 1.$$

Maksimaalse x -i väärtuse X leiame tingimusest $10(E - \rho Xg) = \rho Xg$, st $X = 0.9 \frac{E}{\rho g}$. Pikkuse pikenenud olekus leiame integreerides:

$$L = \int \varepsilon dx = X + \frac{E}{\rho g} \ln 10 = \frac{E}{\rho g} (0.9 + \ln 10).$$

2. Pooljuhtsiire (7 punkti)

Graafikult näeme, et eksisteerib kaks konstantse laengutihedusega piirkonda. Esimeses piirkonnas laiusega $d_n = 0,3 \mu\text{m}$ on negatiivne laengutihedus $\rho_n = -1 \times 10^{-3} \text{C/cm}^3$, teises piirkonnas laiusega $d_p = 0,1 \mu\text{m}$ on positiivne laengutihedus $\rho_p = 3 \times 10^{-3} \text{C/cm}^3$. Kummaski piirkonnas sõltub elektrivälja tugevus lineaarselt koordinaadist ja saavutab maksimaalse väärtuse nende piirkondade keskel (kus $x = 0$). Samas paneme tähele, et positiivne ruumlaeng on absoluutväärtuselt võrdne negatiivse ruumlaenguga (vastavad pindalad graafikul on võrdsed). Seega maksimaalne väljatugevus kohal $x = 0$ avaldub täpselt samuti nagu plaatkondensaatori katete vahel: $E = \sigma / (\varepsilon \varepsilon_0)$, kus σ on laengu pindtihedus, ε on aine suhteline dielektriline läbitavus ja ε_0 on vaakumi dielektriline läbitavus. $\sigma = \rho_p d_p = |\rho_n d_n| = 3 \times 10^{-8} \text{C/cm}^2$, seega $E_{\text{max}} = 35 \text{kV/cm}$. Kuna elektrivälja tugevus sõltub lineaarselt koordinaadist kummaski piirkonnas, siis potentsiaali arvutamisel saame kasutada väljatugevuse keskvärtust: $\Delta\varphi = (E_{\text{max}}/2)(d_n + d_p) = 0,72 \text{V}$. Elektroni potentsiaalse energia muutus on $q\Delta\varphi = 1,2 \times 10^{-19} \text{J}$.

3. Rõhk (7 punkti)

Tuleb arvestada, et raskuskiirendus sõltub sügavusest: $g(r) = GM(r)/r^2$, kus homogeense aine tiheduse ρ korral $M(r) = (4/3)\pi r^3 \rho$, kus r on kaugus Maa keskpunktini. Seega $g(r) = (4/3)\pi G\rho r$. Kui Maa raadius tähistada R , siis rõhk tsentris avaldub

$$p = \int_0^R \rho g(r) r = \frac{4}{3}\pi G\rho^2 \int_0^R r dr = \frac{2}{3}\pi G\rho^2 R^2.$$

Tiheduse ρ saab avaldada Maa massi M kaudu: $M =$

$(4/3)\pi R^3 \rho$. Kokkuvõttes saame

$$p = \frac{3GM^2}{8\pi R^4} \approx 180 \text{GPa}.$$

4. Atmosfäärisoojus (7 punkti)

Valter Kiisalt

Maapinnal registreeritava õhurõhu $p \approx 100 \text{kPa}$ tekitab õhusammal, mille mass pindalaühiku kohta tuleb p/g (kuna atmosfääri paksus on suhteliselt väike võrreldes Maa raadiusega, võib raskuskiirenduse lugeda konstandiks). Atmosfääri kogumass on siis $m = 4\pi r^2(p/g)$, kus r on Maa raadius. Seega molekulide koguarv atmosfääris avaldub $N = N_A(m/\mu)$, kus N_A on Avogadro arv ja m/μ on gaasi hulk moolides. Molekuli soojusliikumise keskmine kineetiline energia ideaalses gaasis on $\epsilon = (i/2)kT$, kus i on molekuli (ergastatud) vabadusastmete arv ja k on Boltzmanni konstant. Kaheatomilise gaasi korral tavatemperatuuridel $i = 5$. Kokkuvõttes

$$E = N\epsilon = \frac{10\pi r^2 N_A k p T}{g\mu} \approx 10^{24} \text{J}.$$

5. Tükisuhkur (10 punkti)

a) Lõplik kõrgus saavutatakse hetkel, mil pooride kumerusest tingitud kapillaarrõhk saab võrdseks vedeliku samba rõhuga:

$$\frac{2\alpha}{r} = \rho gh; \quad h = \frac{2\alpha}{r\rho g}.$$

b) Olgu vedelik juba tõusnud kõrgusele x . Sel juhul mõjub vedelikusambale kapillaarjõud $F_k = \frac{2\alpha l^2}{r}$. (Gravitsioonijõuga pole vaja arvestada, sest $\rho gl^3 \ll \rho gl^2 h = F_k$.) Lisaks mõjub keskmise kiirusega $v = \dot{x}$ voolavale vedelikule viskoossusest tingitud takistusjõud. Kiiruse gradiendiks hindame v/r ning vastav nihkepinge (shear stress) on $\tau = \frac{\nu v}{r}$, millest ühe poori piirkonnas asuvalle vedelikule mõjuvaks takistusjõuks hindame $F_1 = \tau \pi r^2 = \nu v \pi r$ ning hinnateks niisuguste piirkondade koguarvuks $N = \frac{l^2 x}{r^3}$, saame kogu vedelikule mõjuva viskoosse takistusjõu $F_v = N F_1 = \frac{\pi \nu v l^2 x}{r^2}$. Vedeliku hetkeline kiirus v on leitav nende kahe jõu tasakaalust:

$$F_v = F_k; \quad \frac{\pi \nu v l^2 x}{r^2} = \frac{2\alpha l^2}{r}; \quad \frac{dx^2}{dt} = 2x\dot{x} = \frac{4\alpha r}{\pi \nu},$$

mille lahendamisel saame

$$t \approx \frac{\nu l^2}{\alpha r}.$$

6. Prožektor (10 punkti)

Fermat' printsiibi tõttu on kõikide kiirte optilised teepikkused võrdsed, sestap

$$n\sqrt{x^2 + y^2} - x = A,$$

kus A on mingi konstant. On lihtne näha, et see kujutab endast elliptis mille peateljed ühtivad x ja y -telgedega ning vastavate pooltelgede pikkuste suhe on $a/b = n/\sqrt{n^2 - 1}$:

$$\left(\frac{x - x_0}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1.$$

On ilmne, et maksimaalse valguse ära kasutamise huvides peab lähem pooltelg võrduma valguskimbu raadiusega, st $b = d/2$; seega $a = \frac{nd}{2\sqrt{n^2 - 1}}$. Teisalt, valguskimbu äärmine kiir murdub täieliku sisepeegelduse piiril, st $n x_0 = \sqrt{x_0^2 + b^2}$, millest $x_0 = b/\sqrt{n^2 - 1} = \frac{d}{2\sqrt{n^2 - 1}}$.

7. Soojusmahtuvus (10 punkti)

Leiame kvaasiklassikalise hinnagu abil ostsillaatori energianivood: n -ndal energianivool on n nullkohta, st kui osakese liikumisapliitud on x_n , siis lainepikkus on x_n/n ja impulss $p_n = n/x_n$ (kasutades mõõtühikusüsteemi, kus $h = 1$) ning energia jäävuse seadusest saame impulsi karakterse väärtuse jaoks võrrandi $\kappa x_n = \frac{1}{m}(n/x_n)^2$, millest $x_n \propto n^{2/3}$ ning seega ka $E_n \propto n^2$; olgu $E_n = E_0 n^{2/3}$. Sellise ostsillaatori keskmise energia leiame Boltzmanni jaotuse abil:

$$\langle E \rangle = \frac{\sum E_n \exp(-E_n/\beta)}{\sum \exp(-E_n/\beta)},$$

kus $\beta = 1/kT$. Eeldusel, et $kT \gg E_0$, saame summa asendada integraaliga:

$$\langle E \rangle = \frac{\int E_0 n^2 \exp(-E_0 n^{2/3} \beta) dn}{\int \exp(-E_0 n^{2/3} \beta) dn}.$$

Täistades $I(\beta) = \int \exp(-E_0 n^{2/3} \beta) dn = (E_0 \beta)^{-3/2} \int \exp(-\eta^{2/3}) d\eta$, kus $\eta = n(E_0 \beta)^{3/2}$ näeme, et $dI/d\beta = \int E_0 n^2 \exp(-E_0 n^{2/3} \beta) dn$ ning seega

$$\langle E \rangle = -\frac{d}{d\beta} \ln I = \frac{3}{2\beta} = \frac{3}{2} kT.$$

8. Korsten (14 punkti)

Olgu korstna pikkus L ja mass m . Korstna asendit kukkumise vältel iseloomustame kaldenurgaga θ vertikaalsihi suhtes (vt joonis). Kuni murdumiseni pöörleb korsten ümber oma jalami — justkui šarniirse kinnituse ümber. Kui vaadelda korstent ühtlase massijootusega vardana, siis $I = \frac{1}{3}mL^2$ ning

$$\frac{1}{3}L^2\ddot{\theta} = \sin\theta g \frac{L}{2}.$$

Läheme nüüd taustsüsteemi, mis pöörleb kaasa koos korstnaga. Sellisel juhul mõjub korstna pikkusühikule dx (ning massiga $dm = m \frac{dx}{L}$) korstna ristsihis raskusjõud $gdm \sin\theta$ ning inertsi jõud

$$x\ddot{\theta} dm = g \frac{3}{2} \frac{x}{L} \sin\theta dm;$$

resultantjõud on

$$dF = g \sin \theta \frac{m}{L} dx \left(1 - \frac{3x}{2L}\right).$$

Punktis $x = L$ varda pingest ristsihiline komponent $T_{\perp} = 0$, seetõttu $T_{\perp} = \int_x^L dF$. Paneme tähele, et defineerides $F(L) = 0$, kehtib seos $F(x) = -T_{\perp}(x)$. Integreerides leiame $T_{\perp} = \sin \theta \int_x^L g \sin \theta \frac{m}{L} dx \left(1 - \frac{3x}{2L}\right) = gm \sin \theta \int_{\xi}^1 \left(1 - \frac{3}{2}\xi\right) d\xi = gm(1 - \xi) \left[1 - \frac{3}{4}(\xi + 1)\right] \sin \theta$, st

$$T_{\perp} = \frac{gm}{4} (1 - \xi)(1 - 3\xi) \sin \theta,$$

kus $\xi = x/L$.

Vaatleme nüüd korstna mõttelisele ülemisele poolele mõjuvate jõumomentide tasakaalu, kasutades koordinaatide alguspunktna korstna jalamit. Ristlõikes ülekantav jõumoment peab tasakaalustama raskus- ja inertsijõudude jõumomendi: $M = \int_x^L x dF - xT_{\perp} = \int_x^L T_{\perp} dx = \sin \theta \int_0^{\eta} \frac{gmL}{4} \eta(3\eta - 2) d\eta = \sin \theta \frac{gmL}{4} \eta^2(\eta - 1)$ (kasutasime siinkohal ositi integreerimist ja asendust $\eta = 1 - x/L$). Niisiis,

$$M = \frac{gmL}{4} \xi(1 - \xi)^2 \sin \theta.$$

Kui korsten hakkab murduma, siis murdumiskohas asendub tõukepinge tõmbepingega kogu korstna ristlõike ulatuses, va nurkmine P , mille ümber hakkab murdunud osa pöörduma (mis kujuneb murdunud osa toetuspunktiks). Vahetult enne murdumist on murdunud osa veel tasakaalus ning seega peavad jõumomendid tasakaalustuma. Kirjutades välja murdunuvale osale mõjuvate jõudude tasakaalu murdumishetkel punkti P suhtes saame $T_{\parallel}(\xi_0)R = M(\xi_0)$, kus ξ_0 on murdepunkti suhteline kaugus jalamist. Survepinge T_{\parallel} tasakaalustab korstna kaalu, mis tsentrifugaaljõu mittearvestamisel on $T_{\parallel} = Mg(1 - \xi) \cos \theta$. Niisiis saame võrrandi $\frac{gmL}{4} \xi_0(1 - \xi_0)^2 \sin \theta = MgR(1 - \xi_0) \cos \theta$, millest

$$\frac{L}{4R} \xi_0(1 - \xi_0) = \cot \theta.$$

Nurga θ kasvades tekib teatud hetkel esmakordselt lahend sellele võrrandile — vasaku poole kui ξ_0 -funktsiooni maksimumpunktis $\xi_0 = \frac{1}{2}$ — ning vastavas kohas (st korstna keskel) toimubki murdumine. Kriitiline kaldenurk on nüüd juba lihtsasti leitav:

$$\theta = \arctan \frac{16R}{L}.$$

Märkus: Arvutusi on võimalik läbi viia ka täpsemalt, arvestades tsentrifugaaljõust tingitud kaalu vähenemisega; jäägu see koduseks harjutamiseks. Olgu siinkohas öeldud vaid niipalju, et poolnurga tangensi jaoks tuleks kuupvõrrand ning seetõttu on parem lugeda etteantud parameetriks kaldenurk murdumishetkel

ning avaldada selle suuruse abil raadiuse-pikkuse suhe ning murdumiskõrgus. Selgub, et x_{i_0} hakkab murdumisnurga kasvades (st suhte L/R kahanedes) aeglaselt kasvama ja saavutab väärtuse 0,55 kaldenurga 30° juures, mis vastab suhtele $L/R \approx 15$.

9. Dipool-hantel (16 punkti)

Valides $A = Bx\vec{e}_y$ näeme, et Hamiltoniaan ei sõltu y -koordinaadist, st säilib süsteemi üldistatud impulsi summaarne y -komponent:

$$p_y + qB(x_1 - x_2) = 2mv$$

(eeldusel, et hantel asus algselt y -teljel). Analoogselt säilib valiku $A = -By\vec{e}_x$ korral süsteemi üldistatud impulsi summaarne x -komponent:

$$p_x + qB(y_2 - y_1) = qBL.$$

Peale selle säilib süsteemi summaarne kineetiline energia,

$$\frac{1}{4m}(p_x^2 + p_y^2) + \frac{1}{4}mL^2\omega^2 = mv^2,$$

kus ω on hantli nurkkiirus, mis äärmises asendis saab nulliga võrdseks.

Arvestades, et $x_1 - x_2 = L \sin \varphi$ ja $y_2 - y_1 = \cos \varphi$, kus φ on hantli pöördenurk, saame seosed $p_y = 2mv - qBL \sin \varphi$ ning $p_x = qBL(1 - \cos \varphi)$, mille asendamisega jäävuse seadusse saame võrrandi

$$(2mv - qBL \sin \varphi)^2 + (qBL)^2(1 - \cos \varphi)^2 = 4m^2v^2.$$

Tähistades $\frac{2mv}{qBL} \equiv \alpha$, kirjutame võrrandi ümber kujul

$$(\alpha - \sin \varphi)^2 + (1 - \cos \varphi)^2 = \alpha^2,$$

millest

$$-2\alpha \sin \varphi + \sin^2 \varphi + 1 - 2 \cos \varphi + \cos^2 \varphi = 0 \Rightarrow$$

$$1 - \cos \varphi = \alpha \sin \varphi \Rightarrow \varphi = 2 \arctan \alpha = 2 \arctan \frac{2mv}{qBL}.$$