AKADEEMILINE FÜÜSIKAOLÜMPIAAD 2009

Ülesanded *(lahendamiseks aega 5 tundi)*

1. Pööripäevad ***(6 punkti)*** Talvisest suvise pööripäevani on umbes sama palju aega, kui suvisest talviseni, kuid umbes 3,5 päeva rohkem, kui sügisesest pööripäevast kevadiseni. Hinnake nende andmete põhjal Maa orbiidi ekstsentrilisust.

2. Fookus ***(6 punkti)*** Ringikujulise ristläbilõikega paralleelne laserikiirte kimp (lainepikkus $\lambda = 532\,\mathrm{nm}$, diameeter $d = 3\,\mathrm{mm}$) koondatakse läätse abil (fookuskaugus $f = 30\,cm$) ühte punkti. Hinnata fokaalpiirkonnas moodustuva heleda täpi mõõtmeid (rist- ja pikisihis). Heledaks täpiks loeme piirkonda, kus valguse intensiivsus pole väiksem, kui pool selle maksimaalsest väärtusest.

3. Mikrolaineahi ***(10 punkti)*** Mikrolaineahju generaator tekitab elektromagnetlaineid sagedusega $f = 2{,}4\,\mathrm{GHz}$. Need juhitakse lainejuhi abil küpsetuskambrisse. Oletame, et lainejuht on ristkülikukujulise ristlõikega juhtivast materjalist seintega kanal, mille pikkus on hulga suurem kanali laiusest ja kõrgusest. Milline peab olema kanali minimaalne ristlõikepindala S, et lained saaksid seal veel levida?

4. Elektronid ***(10 punkti)*** Hõre elektrongaas asub tugevas homogeenses magnetväljas induktsiooniga B_0 temperatuuril T_0, kusjuures $\hbar B_0 e/m \gg kT_0$ (m ja e — elektroni mass ja laeng, k- Boltzmanni konstant). Magnetvälja tugevust vähendatakse adiabaatiliselt (aeglaselt võrreldes tsüklotronperioodiga) väärtuseni B_1, kusjuures $\hbar B_0 e/m \ll kT_0$. Vahetult peale seda protsessi pole elektrongaas enam soojuslikus tasakaalus: magnetvälja suhtes ristsuunalist soojusliikumist iseloomustav temperatuur $T_\perp$ on erinev pikisuunalise liikumise temperatuurist. Leida $T_\perp$ ning elektrongaasi lõpptemperatuur T_1 peale uue soojusliku tasakaalu saabumist.

5. Loik ***(10 punkti)*** Olgu siledal lauapinnal suur mittemärgava vedeliku loik. Valides vertikaalse x-telje ning horisontaalse y-telje, võib selle loigu kuju kirjeldada vertikaalläbilõike piirjoone $y = f(x)$ abil. Tuletage võrrand funktsiooni $f(x)$ leidmiseks; leidke $f(x)$.

Vihje: Võrrandi

$$(x^2-1)\sqrt{dx^2+dy^2} = dy$$

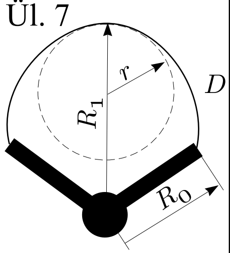
lahendiks piirkonnas $x \in (0, \sqrt{2}]$ on

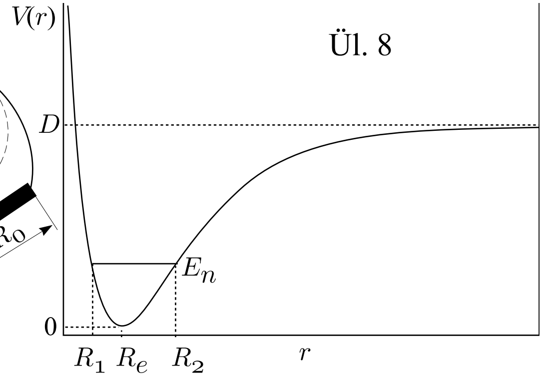
$$y = \sqrt{2-x^2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arctanh}\sqrt{1-x^2/2} + \mathrm{Const.}$$

6. Vedru ***(10 punkti)*** $L = 1\,\mathrm{m}$ pikkusest ühtlasest elastsest traadist kavatsetakse valmistada vedru diameetriga $d = 1\,\mathrm{cm}$. Milline saab olema selle vedru jäikustegur k, kui eelnevalt tehti kindlaks, et selle traadi külge riputatud ketta (mass $m = 100\,\mathrm{g}$ ja raadius $R = 5\,\mathrm{cm}$) torsioonvõnkumiste periood on $T = 4\,\mathrm{s}$?

7. Tsentrifuug ***(10 punkti)*** Tsentrifuugile kinnitatakse otstest nöör nõnda, et mõlemad otspunktid asuvad tsentrifuugi teljest võrdel kaugusel R_0. Tsentrifuugi pööreldes lebab nöör telje risttasandis, kusjuures nööri keskpunkti kaugus teljest on $R_1 > R_0$ ning nööri kõverusraadius keskpunkti juures on $r < R$; raskusjõuga mitte arvestada. Nööri joontihedus on σ ning nöör katkeb pinge T juures. Millise tsentrifuugi nurkkiiruse ω juures nöör katkeb?

Ül. 7





8. WKB kvanttingimus ***(10 punkti)*** "Vana"(Bohr-Sommerfeldi) kvantteooria aluseks on Wentzel-Kramers-Brillouini (WKB) kvantiseerimistingimus

$$n + 1/2 = \frac{1}{\pi\sqrt{C}}\int_{R_1}^{R_2}\sqrt{E_n - V(r)}dr,$$

kus $C = \frac{\hbar^2}{2m}$, E_n on uuritava (ühedimensionaalse) kvantsüsteemi energianivood, $V(r)$ - potentsiaalne energia ning R_1 ja R_2 vastavalt vasak- ja parempoolne klassikaline pöördepunkt (vt joonist), s.t., võrrandi $E_n = V(r)$ kaks lahendit (eeldusel, et potentsiaal omab miinimumi). WKB tingimus on pööratav, nimelt

$$R_2(n) - R_1(n) = 2\sqrt{C}\int_{n_{\min}}^{n}\frac{dn'}{\sqrt{E_n - E_{n'}}},$$

ning see seos on tuntud (ja tänapäevalgi laialt kasutatav) kui Rydberg-Klein-Reesi (RKR) võrrand, mis võimaldab teadaoleva te energianivoode kaudu teha kindlaks pöördepunktid R_1 ja R_2 ja seega ka potentsiaali ligikaudse kuju. Siin eeldatakse, et E_n on kvantarvu n pidev funktsioon ja $n_{\min}$ vastab potentsiaali miinimumile.

Ülesanne: tõestada, et nii WKB tingimus kui ka RKR võrrand on täpsed seosed Morse potentsiaali

$$V(r) = D\left[e^{-\beta(r-R_e)} - 1\right]^2$$

jaoks, mille energianivood (arvutatuna range kvantteooria järgi) avalduvad järgmiselt:

$$E_n = \frac{D}{a^2}x_n(2a - x_n), \quad \left(a^2 = \frac{D}{C\beta^2}, x_n = n + \frac{1}{2}\right)$$

Vihjeid: Lahendamisel läheb tõenäoliselt vaja järgmisi abivalemeid (kõikjal $X = ax^2 + bx + c$):

$$\int\frac{X^{1/2}dx}{x} = X^{1/2} + \frac{b}{2}\int\frac{dx}{X^{1/2}} + c\int\frac{dx}{xX^{1/2}},$$

$\int\frac{dx}{X^{1/2}} = -\frac{1}{(-a)^{1/2}}\arcsin\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}}\right)$, kui $a < 0$ ja $b^2 > 4ac$,

$\int\frac{dx}{X^{1/2}} = \frac{1}{a^{1/2}}\ln\left|2(aX)^{1/2} + 2ax + b\right|$, kui $a > 0$,

$\int\frac{dx}{xX^{1/2}} = \frac{1}{(-c)^{1/2}}\arcsin\left(\frac{bx+2c}{|x|\sqrt{b^2-4ac}}\right)$, kui $c < 0$ ja $b^2 > 4ac$.

9. Plasma ***(12 punkti)*** Juhtivas vedelikus või plasmas säilib magnetvoog läbi iga suvalise materiaalse kontuuri (mõttelise kontuuri, mis liigub koos vedelikuga). Selle kohta öeldakse, et magnetväli on "külmunud"vedelikku. Selletõttu käituvad magnetvälja jõujooned nagu pillikeeled - need saavad küll venida, aga kui kaks jõujoont haakuvad üksteise taha (nt vastassuundades liikuvad horisontaalne ja vertikaalne jõujoon), siis nad ei saa üktseise tagant lahti enne, kui Joule'iline dissipatsioon on aidanud jõujoontel "ümber ühenduda". Alljärgnevalt vaatleme piisavalt kiireid protsesse, mille jooksul "ümber ühendumine"ei jõua olulisel määral toimuda.

Täitku silindrilist anumat kõrgusega H ja raadiusega R hõre plasma (mille rõhku võib ignoreerida ning mille juhtivuse võib lugeda ideaalseks). Silindri keskel on ideaalselt juhtiv metalltelg raadiusega r (plasmaga kokku puutumisest tingitud erosiooni ei arvesta); silindri seinad on samuti ideaalselt juhtivad. Metalltelge ühendab silindri külgseinaga magnetvoog Φ, vt joonis. Metalltelge pööratakse seinte suhtes, tehes $N \gg 1$ täispöööret. Milliseks kujuneb seejärel magnetiline induktsioon plasmas? Millist jõumomenti M tuli metalltelje pööramiseks rakendada?