

# ELASTSUS- JA PLASTSUSTEORIAALASEST UURIMISTÖÖST TARTU ÜLIKOOLIS

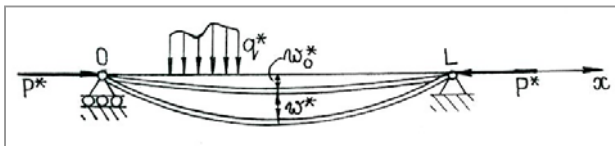
*Jaan Lelley, Ülo Lepik*

Tartu Ülikooli rakendusmatemaatika instituut

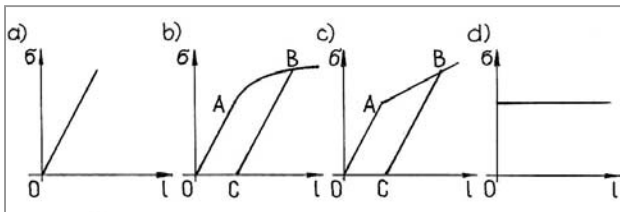
Mitteelastsete konstruktsioonide uurimisega on tegeldud Tartu Ülikooli teoreetilise mehaanika õppetoolis alates 1950. aastast. Alljärgnevalt on ära toodud selle töö lühiiseloost.

## UURIMISOBJEKTID

On käsitletud mitmesuguseid konstruktsioonelemente (vardad, plaadid, koorikud), millele mõjub kas staatiline või dünaamiline koormus. Mõjuda võivad nii rist- kui ka pikisuunalised jõud (joonis 1).



Joonis 1.  
Varda koormamine.



Joonis 2.  
Konstruktsiooni materjalide tõmbediagrammid a) elastne materjal, b) elastne-plastne materjal, c) lineaarselt kales-  
tuv materjal, d) plastne materjal.

Konstruktsiooni materjal võib olla elastne või elastne-plastne (joonisel 2 a ja b on toodud nende materjalide tõmbediagrammid).

Elastse-plastse materjali korral elastsuspiiri ületamisel algab diagrammi kõverdumine punktis A ja ilmnevad jääkdeformatsioonid. Et sellise diagrammi kasutamine konkreetsete ülesannete lahendamiseks on tülikas, siis seda sageli lihtsustatakse. Üks lihtsustamisvõimalusi on esitatud joonisel 2 c (lineaarselt kales-  
tuv materjal).

Teatud ülesannete korral võib jätta kales-  
tumise ja elastsuse deformatsioonide osa arvestamata ja me saame nn jäik-plastse materjali diagrammi (joonis 2 d). Vaatamata oma erakordsele lihtsusele annab selline mudel siiski praktikaga heas kooskõlas olevaid tulemusi.

Elastse-plastse materjali korral tuleb arvestada materjali duaalset käitumist koormuse langusel, sel juhul liigume piki sirget BC joonisel 2 b ja c.

Et plastsusteooria loodi olulises osas alles pärast 1940. aastat, on siin veel mitmeidki lahendamata ülesandeid. Lisaks sellele tuleb arvestada ka teisi efekte, nagu konstruktsioonide tsükliline koormamine, viskoossus, lainelevi, konstruktsiooni käitumine pärast kriitilises staadiumis. Nende ülesannete lahendamiseks oleme koostanud sobivad mudelid, mis enamikul juhtudel on kirjeldatavad diferentsiaalvõrranditega. Seejärel koostatakse arvutusprogrammi ja realiseeritakse see personaalarvutil. Saadud arvutustulemusi on hinnatud olemasolevate katseandmetega võrdlemise teel.

## STAATIKA

Jäik-plastse keha kontseptsioonile on leitud mitmeid rakendusvõimalusi. Üks esimesi ja võimalik, et ka efektiivsemaid rakendusi on seotud piirkandevõime teooriaga. Piirkandevõime teooria võimaldab määrata konstruktsioonelemendi kandevõime ülem- ja alampiiri eeldusel, et elemendi materjali võib lugeda ideaalselt jäik-plastseks ning et pinged keha üheski punktis ei ületa lubatavaid väärtusi.

Kui teooria loomise algaastail uuriti D. Druckeri, W. Prageri, H. Hopkinsi, P. Hodge'i jt poolt geometriselt lineaarsete plaatide ja koorikute painde-ülesandeid, siis TÜ teadlaste poolt on seda suunda laiendatud geometriselt mittelineaarsete konstruktsioonide jaoks. On vaadeldud ümar- ja rõngasplaatide, samuti silindriliste koorikute deformeermist mitmesuguste koormuste ja kinnitusviiside korral.

Erilist teoreetilist (ja ka praktilist) huvi pakuvad plaatide ja koorikute ülesanded sel juhul, kui plaadi või kooriku paksus ei ole konstantne.

Muutuva paksusega konstruktsioonide korral vaadeldakse kahte tüüpi ülesandeid, kui

- 1) paksuse jaotus on ette antud,
- 2) paksuse (massi) jaotus on otsitav.

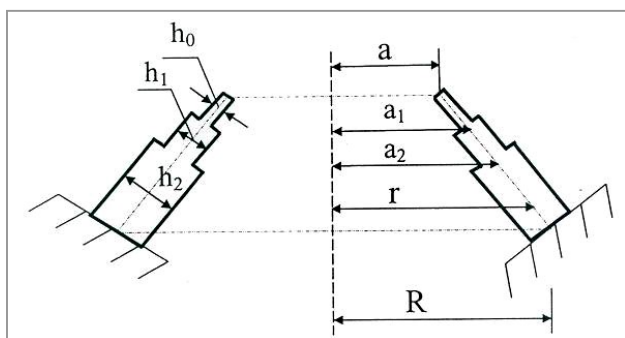
Esimesel juhul on tegemist nn otsese ülesandega, teisel juhul optimeerimisülesandega.

Tuleb kohe öelda, et mitte kõigi optimeerimisülesannete puhul ei ole otsitavaks (võrreldes otsese ülesandega) paksuse jaotus. Tundmatuks võib olla ka näiteks koormuste või materjali konstantide jaotus, samuti sisetugede asend jne.

TÜ teadlaste poolt on viimastel aastatel uuritud muutuva paksusega rõngasplaate, silindrilisi, koonilisi ja sfäärilisi koorikuid.

Plastsete kooniliste (joonis 3) ja sfääriliste (joonis 4) koorikute jaoks on leitud optimaalsed projektid nii, et

- 1) materjalikulu on minimaalne ette antud kandevõime korral;
- 2) kooriku kandevõime on maksimaalne ette antud materjali hulga korral.



Joonis 3.  
Plastsete kooniliste koorikute optimaalne projekt.

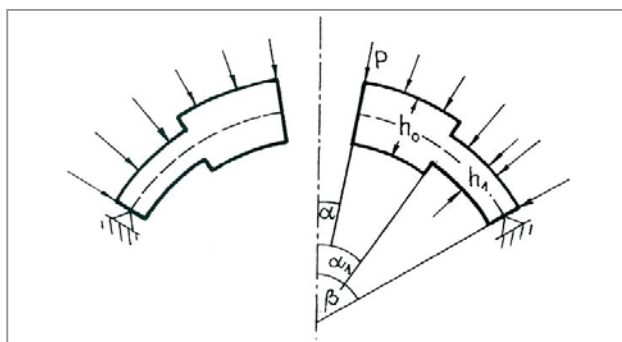
Vaadeldes tükiti konstantse paksusega koorikuid erineva astmete arvu korral on näidatud, et ülesannete “üks” ja “kaks” lahendid on suhteliselt lähedased, ent mitte kokkulangevad. Parameetrite optimaalsed väärtused sõltuvad plaadi või kooriku geometriilistest ja füüsikalistest parameetritest.

Väga üldistatult võib öelda, et ühe astmega projekti efektiivsus on 2–3% kõrgem võrreldes samaväärsel konstantse paksusega koorikuga. Kahe astme puhul on see näitaja keskmiselt 3–5%. Astmete arvu edasise suurendamisel tõuseb konstruktsiooni efektiivsus aeglaselt; ülempiiriks on see efektiivsuse koefitsiendi väärtus, mis vastab pidevalt muutuva paksusega projektile.

## JÄIK-PLASTSETE KONSTRUKTSIOONIDE DÜNAAMIKA

Siin on analüüsitud põhiliselt tükiti konstantse paksusega konstruktsioone, millele mõjub lühiajaline ristkoormus. Konstruktsiooni materjal loetakse jäik-plastseks. Pärast koormuse eemaldamist konstruktsiooni läbipainded kasvavad veel veidi inertsil mõjul, mille järel liikumine seiskub. Meie eesmärgiks on konstruktsiooni lõppläbipainde kujud määrata.

Lihtsamatel juhtudel (näiteks kahe astmega konstruktsioonid) on sellele ülesandele võimalik leida analüütiline lahendus. Tingituna jäik-plastse materjali kontseptsioonist koosneb kiiruste epüür sirglõikudest, mis on omavahel ühendatud nn plastsete šarniiridega (nurkpunktidega). Kui aga mõjuvad mitmed koormused ja astmete arv on suurem kui kaks, muutub pilt üsna komplitseerituks: plastseid šarniire on enam kui üks, neid võib liikumise käigus juurde tekkida või ära kaduda. Selliste ülesannete



Joonis 4.  
Sfääriliste koorikute optimaalne projekt.

lahendamiseks on meil loodud nn kvaasimodaalsete lahendite meetod, mis võimaldab arvuti abil lahendada kui tahes keerulisi ülesandeid.

Jäik-plastse materjali kontseptsiooni oleme kasutanud talade, ümarplaatide, silindriliste, sfääriliste ja kooniliste koorikute puhul. Siia kuuluvad ka optimeerimisülesanded, kus on ette antud konstruktsiooni ruumala; üksikute kihtide paksusi püütakse valida nii, et konstruktsiooni läbipaine oleks vähim. On vaadeldud ka juhtumeid, kus painduvuse vähendamiseks on pandud konstruktsioonile lisatugi; püütakse leida selle optimaalset asendit.

### ELASTSETE-PLASTSETE KONSTRUKTSIOONIDE DÜNAAMIKA

Jäik-plastse materjali puuduseks on asjaolu, et pole võimalik arvestada materjali duaalset käitumist koormuse tõusul ja langusel. Seetõttu jäik-plastne mudel ei sobi mittelineaarsete võnkumiste kirjeldamiseks.

Elastsete-plastsete süsteemide korral lähtutakse tavaliselt liikumise diferentsiaalvõrranditest, milles sisalduks ka geomeetiline mittelineaarsus (nn Kármáni tüüpi võrrandid). Paljudel juhtudel integreeritakse need võrrandid lõplike elementide meetodil. Sel juhul saadakse tulemused suure hulga arvuliste andmete (või graafikute) kujul, mis on raskesti interpreteeritavad, selles arvude rägastikus võib kaduma minna probleemi sisu. Seepärast oleme pidanud vajalikuks alternatiivse lahendusmeetodi väljatöötamist. See lahendusviis baseerub Galjorkini meetodil (Galjorkini meetod elastsete ülesannete lahendamiseks on laialt levinud, kuid väga vähe on ära tehtud elastsete-plastsete deformatsioonide juhul).

Meie poolt pakutud meetod seisneb järgnevas. Konstruktsioonile võivad mõjuda nii rist- kui ka pikikoormused. Galjorkini meetodi abil integreeritakse liikumisvõrrandid koordinaadi järgi (tulemus sisaldab mitmeid integraale, mis arvutatakse numbriliselt). Diskretiseerimiseks ajas kasutatakse tsentraalsete vahede meetodit. On välja töötatud ja reali-

seeritud arvutiprogramm ning lahendatud rida konkreetseid ülesandeid varraste ja silindriliste koorikute kohta. Tulemustest nähtub, et mitmetel juhtudel, näiteks pulseeriva väliskoormuse mõjul, võib liikumine muutuda kaootiliseks. Eriti huvitavad on ülesanded, kus konstruktsioonile mõjub suruv pikikoormus (näiteks pikisuunas langeva massi mõjul) ja võib ilmnedä dünaamiline stabiilsuse kadu. Siin tuleb eristada kahte juhtu: (a) aeglane koormamine, kus pikiinertsjõudusid ei pruugi arvestada, ja (b) kiire koormamine. Viimasel juhul tuleb arvestada ka pikilaineid ning piki- ja ristlainete superpositsiooni, korduva peegeldumise tõttu ilmneb üsna komplikseeritud seisund.

### UUSI SUUNDI

Viimastel aastatel oleme oma teadustemaatikat mõnevõrra muutnud.

#### LAINIKUD

Oleme huvitunud ka lainikutest (wavelets) ja kavatseme neid edaspidi kasutada elastsete ja elastsete-plastsete konstruktsioonide dünaamikas. Lainikute kasutamine on eriti otstarbekas ülesannete korral, kus esinevad järsud koormuse muutused või lokaalsed hälbed konstruktsiooni kujus.

#### PRAGUDE MEHAANIKA

Purunemismehaanika probleemide uurimist alustati teoreetilise mehaanika õppetoolis üsna hiljuti. Põhiliseks uurimisteenaks on pragude leviku dünaamika ja prao stabiilsus elastses-plastses keskkonnas. Seni on uuritud plastset tala ja silindrilist koorikut, mille kinnituskohas on mitteläbiv pragu. On tuletatud tingimused prao stabiilsuseks, kasutades J-integraali kontseptsiooni.

Edaspidises uurimistöös püütakse siduda purunemismehaanika kriteeriumid nende kitsendustega, mis on pandud peale ping- ja deformatsiooniseisundile elastsete-plastsete kehade optimeerimisel. Teise suunana tasub mainida niisuguste mittepuras-tavate meetodite väljatöötamist, mis võimaldavad avastada pragusid ja teisi defekte elastses-plastses kehas võnkumiste abil.