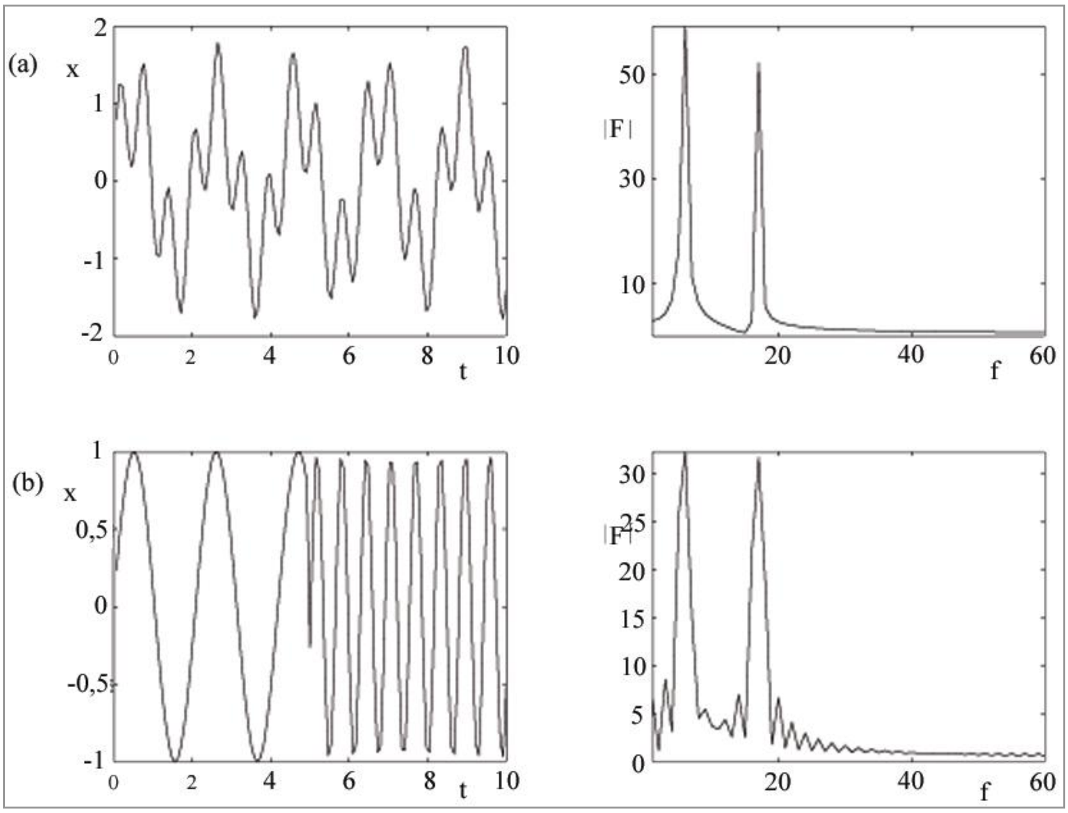
LAINIKUTE RAKENDAMINE DIFERENTSIAAL- JA INTEGRAALVÕRRANDITE LAHENDAMISEKS

Ülo Lepik
Tartu Ülikooli rakendusmatemaatika instituut

MILLEKS ME VAJAME LAINIKUID?

Igapäevases elus puutume kokku mitmesuguste ajas muutuvate protsessidega, nagu ehitiste ja aparaatide võnkumised, südame võnkediagrammid, merelainetus ja palju muud. Neid liikumisi kirjeldab mingi aegrida $x = x(t)$. Et selgitada nende protsesside olemust, tuleb antud signaali töödelda. Seda tehakse sageli Fourier meetodil. Fourier teisendus võimaldab sageduste spektrile ω seada vastavusse spektri võimsuse $P(\omega)$. Öeldu illustreerimiseks on joonisel 1 toodud kaks aegrida ja nende Fourier diagrammid. Kuigi on tegemist kahe täiesti erineva liikumiskäiguga, on ometi nende Fourier diagrammid väga sarnased (mõlemas diagrammis on kaks piiki). Matemaatilises keeles öeldakse: "Fourier meetod omab head lahutusvõimet sageduste osas, kuid ei võimalda lokaliseerida protsessi ajalist käiku".

Üks võimalus sellest puudusest üle saamiseks ongi lainikute kasutamine.



Joonis 1. Aegread ja nende Fourier' diagrammid.

MIS ON LAINIKUD?

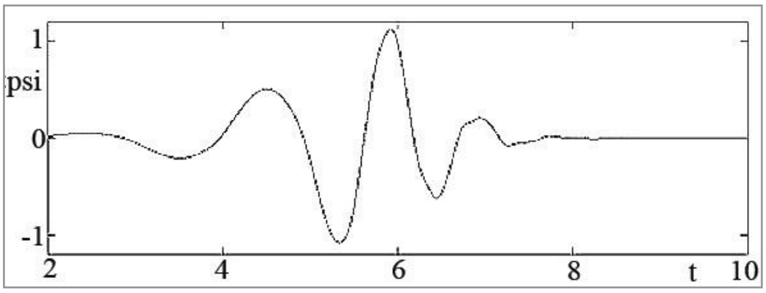
Lainikute (inglise keeles *wavelet*) juurde jõuame järgmisel viisil. Defineerime mingi funktsiooni $\psi = \psi(t)$, mida nimetatakse EMALAINIKUKS (*mother wavelet*). Sellest moodustame teisendusega

$$\psi(t, j, k) = 2^{-j/2}\psi(2^{-j}\, t - k)$$

kahedimensionaalse LAINIKUTE PERE. Parameetrit k nimetatakse TRANSLATSIOONIKS. Selle muutmine võimaldab nihutada emalainikut $\psi(t)$ piki ajatelge. Parameeter j, mis on naturaalarv, määrab lainiku TASEME (*level*); j suurendamisel muutub lainik laiemaks ja madalamaks. Sel viisil saadud funktsioon võimaldabki lokaliseerida liikumise ajas.

Emalainiku $\psi(t)$ valikuks on meil üsna suur vabadus, seda kasutades saame mitmesuguseid lainikute peresid. Esimene kasutuskõlblik lainik esitati 1985. a. Kõige enam on aga tuntud lainik, mille konstrueeris belglanna I. Daubechies 1988. a.

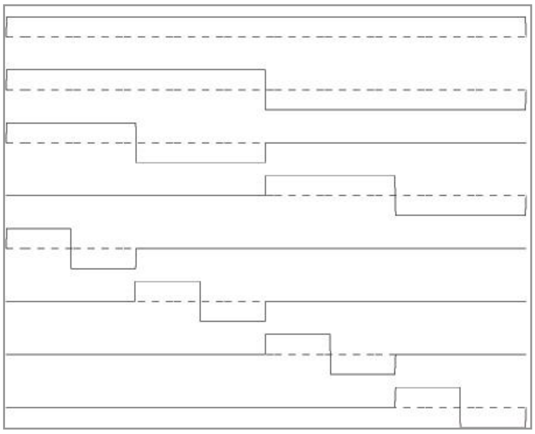
Daubechies emalainik tasemega $J = 6$ on esitatud joonisel 2. Daubechies lainikutel on mitmeid häid omadusi: nad on küllaldaselt siledad ja omavad lõpliku pikkusega kandjat. Puuduseks on aga asjaolu, et nad pole esitatavad valemina. See asjaolu ei võimalda neist funktsioone analüütiliselt diferentseerida ja integreerida. Praktikas tuleb sageli arvutada integraale, kus integraali märgi all seisab mingi üldiselt mittelineaarne funktsioon lainikutest ja nende tuletistest. Lihtsamate juhtude jaoks on tuletatud rida valemeid, nn SIDEMEKORDAJAID (*connection coefficients*), mida võib leida käsiraamatutest või internetist. Nende kasutamine komplitseerib lahenduskäiku ja nad on tuletatud vaid väikesele osale kõigist võimalikest erijuhtudest. Sama märkus kehtib ka teiste lainikute (nagu näiteks Symlet'i, Coifman'i jt lainikud) kohta. Ilmselt igasugused lahendusmeetodi lihtsustused on teretulnud. Üks võimalus selleks on Haari lainikute kasutamine.



Joonis 2.
Daubechies'i lainik tasemega $J = 6$.

HAARI LAINIKUD

1910. a võttis A. Haar kasutusele funktsioonid, mis koosnevad tükati konstantsete funktsioonide paaridest. Nende baasil konstrueeriti 1980. aastate teisel poolel lainikud, mis sisuliselt on Daubechies lainikud tasemega 1. Kaheksa esimest Haari lainikut on esitatud joonisel 3. Matemaatilises mõttes Haari lainik on lihtsaim ortonormaalne lainik kompaktse kandjaga. Haari lainikuid on lihtne analüütiliselt integreerida suvaline arv kordi.



Joonis 3.
Kaheksa esimest Haari lainikut.

Haari lainikutel on aga ka oluline puudus – nad pole pidevad ja seetõttu pole katkemispunktides diferentseeritavad. Sellest raskusest võib üle saada vähemalt kahel viisil. Esiteks võib lainikut siluda, mingi interpoleeriva splaini abil. See aga komplitseerib arvutusi ja Haari lainikute põhiline eelis – lihtsus – läheb kaduma.

Teise võimaluse esitasid 1997. a Chen ja Hsiao. Nad soovitasid Haari lainikute järgi arendada ritta mitte otsitava funktsiooni enese, vaid võrrandis esineva selle funktsiooni kõrgeimat järku tuletise järgi. Madalamat järku tuletised (ja funktsioon ise) leitakse integreerimise teel.

See idee on viimasel ajal leidnud teadustöödes laialdast rakendamist. Meie oleme seda kasutanud diferentsiaal- ja integraalvõrrandite lahendamisel. Neid töid ongi allpool lühidalt refereeritud.

INTEGRAALVÕRRANDID

Paljud teaduse ja tehnika probleemid, nagu võnkumised, kiirgusenergia hajumine jms, on taandatavad integraalvõrrandi

$$u(x) = \int_a^b K(t, x, u(t))dt + f(x)$$

lahendamisele. Siin on K ja f teadaolevad funktsioonid, $u(x)$ otsitav funktsioon. Funktsiooni K nimetatakse integraalvõrrandi tuumaks. Kui a ja b on konstandid, saame Fredholmi integraalvõrrandi, kui aga $b = x$, siis Volterra võrrandi.

Otsime võrrandi lahendit kujus

$$u(x) = \sum_i a_i \cdot h_i(x),$$

kus $h_i(x)$ on Haari lainikud, a_i – lainikute kordajad, mis tulevad leida. Lahendusmeetodit võib valida mitmeti. Meie kasutame siin nn KOLLOKATSIOONIMEETODIT, mille kohaselt integraalvõrrand rahuldatakse n punktis (kollokatsioonpunktid).

Võrrandis esinev integraal on analüütiliselt leitav. Lahenduskäik on väga lihtne, eriti kui kasutada programmide paketis MATLAB toodud maatriksarvutust. Tulemus on küllalt täpne isegi väikese kollokatsiooni punktide arvu korral (näiteks 8 või 16 punkti korral).

Lahenduskäiguga võib tutvuda artiklite [Lepik, Tamme, 2005, 2007; Lepik, 2006] vahendusel.

DIFERENTSIAALVÕRRANDID

Diferentsiaalvõrrandite tähtsus tänapäeva teaduse ja tehnika probleemide lahendamisel on väga suur. Juba Newton ütles, et loodusseadused on kirjutatud diferentsiaalvõrrandite keeles. Kui otsitav funktsioon sõltub ainult ühest argumendist (nt $u = u(t)$), saame harilikud diferentsiaalvõrrandid. Mitme argumendi korral on tegu osatuletistega diferentsiaalvõrranditega.

Allpool vaatame juhtu $u = u(x, t)$, kus x on ruumikoordinaat ja t – aeg. Oleme rakendanud Haari lainikuid järgmiste diferentsiaalvõrrandite lahendamiseks (alumised indeksid märgivad tuletisi):

(a) diffusioonivõrrand $u_t = Au_{xx}$

(b) Burgers'i võrrand $u_t + uu_x = \nu u_{xx}$

(c) sine-Gordoni võrrand $Au_{xx} - u_{tt} = \sin u$.

Niisugustel võrranditel on palju rakendusi nii loodusteadustes kui ka tehnikas (soojuse leviku probleemid, difusioon, lainete levik mitmesugustes keskkondades jne).

Ülaltoodud võrrandite lahendamiseks kasutasime järgmist metoodikat. Esmalt diskretiseerisime võrrandi ajas, kasutades selleks näiteks Crank-Nicholsoni meetodit. Edasi arendasime koordinaadi järgi ritta võrrandis esineva kõige kõrgemat järku tuletise. Madalamat järku tuletised saime integreerimise teel, kusjuures integreerimiskonstandid määrati antud võrrandi alg- ja rajatingimustest. Jällegi selgus, et tulemuste täpsus on küllalt hea juba väikese arvu võrgupunktide korral. Lahenduskäiguga ja arvutustulemustega võib tutvuda artiklite [Lepik, 2003, 2007] abil.

KOKKUVÕTE

Haari lainikute meetod diferentsiaal- ja integraalvõrrandite lahendamiseks on täiesti konkurentsivõimeline klassikaliste meetoditega.

Selle eelisteks on lahendusskeemide lihtsus, väike võrgupunktide arv ning sellest tulenev lühike arvutiaeg.

TÄIENDAVAKS LUGEMISEKS

Lepik, Ü. 2003. Numerical solution of differential equations using Haar wavelets. Math. Comput. Simul., 68, 127-143.

Lepik, Ü. 2006. Haar wavelet method for nonlinear integro-differential equations. Appl. Math. Comput., 176, 324-333.

Lepik, Ü. 2007. Numerical solution of evolution equations by the Haar wavelet method. Appl. Math. Comput., (accepted).

Lepik, Ü., Tamme, E. 2005. Application of the Haar wavelets for solution of linear integral equations. 5.-10. July 2004, Antalya, Turkey – Dynamical Systems and Applications, Proc., 395-407.

Lepik, Ü., Tamme, E. 2007. Solution of nonlinear integral equations via Haar wavelet method. Proc. Eston. Acad. Sci., (submitted).