MIKROSTRUKTUURSED MATERJALID JA DEFORMATSIOONILAINED

Jüri Engelbrecht, Andrus Salupere, Arkadi Berezovski
Tallinna Tehnikaülikooli küberneetika instituut, Mittelineaarsete Protsesside Analüüsi Keskus

Materjaliteadus on tänapäeval kiiresti arenev multidistsiplinaarne teadusvaldkond. On ju materjalid kasutusel pea kõigil elualadel. Kõrvuti looduslike materjalidega seob tehnoloogia areng meid ikka rohkem tehismaterjalidega, mis peavad rahuldama etteantud omadusi väga laial skaalal. Kui heita pilk minevikku, siis uus materjal sündis tavaliselt katse-eksituse meetodil. See arusaam muutus, kui hakati aru saama materjalide struktuurist ja selle seostest materjali kui terviku omadustega. Seega on vaja hästi tunda materjalide mikrostruktuuri alates aatomite tasandist kuni komposiitmaterjalide struktuurini. See aga tähendab, et materjaliteaduses põimuvad tänapäeval termodünaamika, kristallograafia, mehaanika, keemia, tahkise- ja kvantfüüsika tervikuks, mis lubab analüüsida nii faasiüleminekuid kui purunemist, materjalide omaduste muutumist temperatuuri mõjul, elektromagnetilises väljas või ka välisjõudude toimel, materjalide kohandamist bioloogilistesse süsteemidesse jne, jne.

Üks vana ütlus kõlab, et materjalid on nagu inimesed: variatsioonid ja puudused teevad nad huvitavaks. Ja nii pole kristallstruktuurid regulaarsed, hulk materjale on amorfsed, kasutusel on funktsionaalselt skaleeritud materjalid, materjalides esinevad mikropraod...

Seega klassikaline kristallstruktuuri üldistus pidevaks keskkonnaks ilmselt ei suuda kirjeldada kõiki materjalide omadusi ja vaja on ühendada materjali mikrostruktuuri (peenstruktuuri) ja makrostruktuuri (konstruktsioonielemendi) kirjeldus tervikuks.

TTÜ küberneetika instituudi Mittelineaarsete Protsesside Analüüsi Keskus (inglisekeelse akronüümiga CENS) on viimasel ajal suurt tähelepanu pööranud lainelevi protsesside modelleerimisele mikrostruktuuriga materjalides. Kui materjaliteaduse põhiprobleemideks on materjalide tootmine, struktuur, omadused, käitumine, siis CENSi vaateväljas on nende käitumine dünaamilistel koormustel ja omaduste määramine. Seda tihedas koostöös Pariisi, Torino, Saarbrückeni jt keskuste teadlastega. Alljärgnevalt on toodud sellest tegevusest lühiülevaade (vt ka http://cens.ioc.ee).

MATEMAATILISED MUDELID

Mikrostruktuurse materjali üheks tunnusjooneks on teatava sisemise mastaabi või karakteristliku pikkuse olemasolu, mis kirjeldab kristallvõre perioodi, graanulite või täiteaine iseloomulikku mõõdet, mikropragude vahelist kaugust, komposiitmaterjalide kihtide paksust või muud iseloomulikku mõõdet. Taolise sisemise mastaabi olemasolu toob otseselt mängu deformatsioonilainete dispersiooni. Vastava teooria loomine võib alata kas materjali diskreetsuse (kristallstruktuur) või pidevuse kontseptsioonist. Esimesel juhul on tegemist atomaarset struktuuri kirjeldavate punktmasside süsteemiga, mille liikumisvõrrandid tuletatakse liikumishulga jäävuse seadusest [Maugin, 1999]. On võimalik eristada punktmasse ja nendevahelisi jõude, kuid loomulikult on saadud süsteem liiga suur praktilisteks arvutusteks. Pideva keskkonna kontseptsiooni kasutades on üks võimalus võtta arvesse materjali omaduste sõltuvust koordinaadist ning omistada kõik füüsikalised parameetrid igale materjali ruumielemendile. Teine võimalus, mille puhul saab paremini haarata füüsikalist omapära, on eristada makro- ja mikrostruktuur ning formuleerida jäävusseadused mõlema jaoks eraldi [Eringen, 1966, 1999; Mindlin, 1964]. Lisaks on siis võimalik vaadelda mikrostruktuuri mitteinertsiaalsena, mis viib sisemuutujate formalismini [Maugin, 1990].

Uuringud CENSis haaravad deformatsioonilainete ja faasisiirdefrontide levi analüüsi.

DEFORMATSIOONILAINED MIKROSTRUKTUURSETES MATERJALIDES

Mikrostruktuursetes materjalides toimuva lainelevi uurimisel on CENSis rakendatud Mindlini ja Kortewegi-de Vriesi tüüpi mudeleid.

MINDLINI TÜÜPI MUDELID

Viimastel aastatel oleme üha rohkem tähelepanu pööranud Mindlini [1964] teooriast lähtuvatele mudelitele, kus on ühildatud

- sisemiste mastaapide mõju mitteklassikalise pideva keskkonna teooria raames;
- lainehierarhiate kontseptsioon [Whitham, 1974];
- makro- ja mikrostruktuuri mittelineaarsus.

Teooria ise ei sisalda algselt mastaape, selleks on vaja asümptootilisi teisendusi, mille tulemusena on jõutud füüsikaliselt "läbipaistvate" mudeliteni. Tüüpiline ühedimensionaalne pikilaine võrrand mikrostruktuuriga materjalis on järgmine [Engelbrecht jt, 2005; Janno, Engelbrecht, 2005a]:

$$\begin{aligned} &U_{TT} - bU_{XX} - \frac{\mu}{2}\left(U_X^2\right)_X - \\ &- \delta\left(\beta U_{TT} - \gamma U_{XX} - \delta^{1/2} U_{XX}^2\right)_{XX} = 0, \end{aligned} \qquad (1)$$

kus X ja T on vastavalt aeg ja koordinaat; $b, \beta, \gamma, \mu, \lambda$ – materjali parameetrid ning δ – mastaabitegur, mis näitab mikrostruktuuri iseloomuliku mõõdu ja lainepikkuse suhet. Võrrandi (1) integreerimisel lisanduvad alg- ja rajatingimused. Ka intuitiivselt on selge, et väikeste δ väärtuste korral (lainepikkus oluliselt suurem kui mikrostruktuuri mõõde) laine "tunnetab" vähem mikrostruktuuri olemasolu ja suurte δ väärtuste korral hakkab mikrostruktuur olulist rolli mängima.

Varasemad tulemused haarasid dissipatsiooni arvestamist [Engelbrecht, Pastrone, 2003; Sillat, Engelbrecht, 2003] ja mikrostruktuuri mittelineaarsuse modelleerimist [Engelbrecht, Pastrone, 2003].

Hiljuti on läbi viidud põhjalik dispersioonianalüüs [Engelbrecht jt, 2005, 2006; Peets, 2006] ja üldistatud matemaatilisi mudeleid. On nimelt näidatud [Engelbrecht jt, 2005], kuidas tuletatud mudel on seotud Eshelby pinge ja pseudoimpulsi (ingl *pseudomomentum*) kontseptsiooniga [Maugin, 1993] ja kuidas üldistada teooriat multimastaapse juhu jaoks (st mikrostruktuuri sees on veel väiksem struktuur oma skaalaga). Viimane tulemus on eriti oluline seoses nanoskaalat arvestavate rakendustega. See kõik loob tugeva aluse lainelevi protsesside analüüsiks ning konkreetsete ülesannete, k.a pöördülesannete, lahendamiseks. Viimaste korral on eesmärgiks määrata materjalide omadusi, teades lainete levi iseloomustavaid suurusi (faasikiirused, amplituudid jne).

KORTEWEGI-DE VRIESI TÜÜPI MUDELEID

Kui mudelvõrrand (1) on laiendus klassikalisele lainevõrrandile, siis matemaatilise füüsika viimaste aastakümnete tähelepanu on evolutsioonivõrranditel, mille tuntuimaks näiteks on Kortewegi-de Vriesi (KdV) võrrand [Zabusky, Kruskal, 1965]. KdV võrrand kirjeldab lainelevi ruutmittelineaarsuse ja kuupdispersiooni arvestamisega ning ta oli alul tuletatud kirjeldamaks laineid madalas vees. Praeguseks on KdV võrrand ja tema modifikatsioonid leidnud laialdast kasutamist ka teistes valdkondades, sh lainelevi kirjeldamisel mikrostruktuursetes tahkistes.

CENSi tähelepanu on olnud suunatud martensiitausteniit sulamitele, kus dispersioon on kõrgemat järku ja mittelineaarsust kirjeldab kahe miinimumiga elastne potentsiaal [Salupere jt, 2001]:

$$\begin{aligned} &u_t + \left[P(u)\right]_x + du_{3x} + bu_{5x} = 0, \\ &P(u) = 0{,}25u^4 - 0{,}5u^2, \end{aligned} \qquad (2)$$

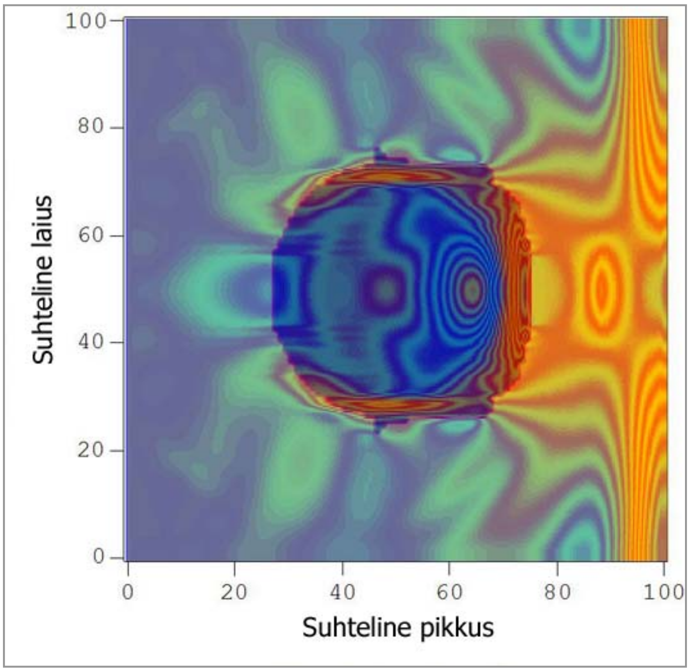
kus d ja b on dispersiooniparameetrid. Teiseks oluliseks uurimisobjektiks on olnud granuleeritud materjalid, kus mudelvõrrand sisaldab kahte KdV operaatorit [Giovine, Oliveri, 1995], st analoogiliselt võrrandiga (1) on ka siin tegu hierarhilise süsteemiga:

$$\begin{aligned} &u_t + uu_x + \alpha_1 u_{3x} + \\ &+ \delta(u_t + uu_x + \alpha_2 u_{3x})_{2x} = 0 \ , \end{aligned} \tag{3}$$

kus α_1 ja α_2 on dispersiooniparameetrid ja δ – mastaabitegur. Kui klassikaline KdV võrrand kirjeldab üksiklaineid – solitone – kui koherentseid tasakaalustatud laineid ning energiakandjaid, siis ülalnimetatud füüsikalised süsteemid on keerulisemad ning tasakaal mittelineaarsete ja dispersiivsete efektide vahel võib siin realiseeruda ka üksiklainete komplekside näol [Ilison, Salupere, 2003b; Salupere jt, 2005]. Loomulikult on ka võrrand (1) teisendatav evolutsioonivõrrandi keelde [Randrüüt, 2006]. Tulemus erineb aga KdV-võrrandist keerulisema mittelineaarsuse poolest.

FAASISIIRDEFRONDID

Kujumäluga sulamid on nn "nutikad" materjalid, mis kohanevad väliskeskkonnaga, tõstes nii konstruktsiooni efektiivsust või laiendades kasutusala. Martensiit-austeniit tüüpi sulamites on seega oluline faasisiire ja martensiitne kahestumine, mis nõuab protsessi kineetika täpset kirjeldust. Faasisiirdefrondi leviku kirjeldamiseks on esitatud uus meetod [Berezovski, Maugin, 2005a], mis põhineb pideva keskkonna teooria arendustel, süsteemide termodünaamikal ja jäävusseaduste esitamise numbrilistel meetoditel. Erilise tähelepanu all on dünaamilisest pingeolukorrast tekitatud faasisiirded. On konstrueeritud kõrge täpsusega algoritm faasisiirete määramiseks, mis nõudis nn lõpliku mahu meetodi täiustamist termodünaamika tingimuste lisamisega. See on tingitud faasisiirde protsessi mittetasakaalulisest olemusest. Probleemi lahendus on leitud diskreetsete süsteemide termodünaamika raames [Berezovski, Maugin, 2005a] mittetasakaaluliste termodünaamiliste tingimuste rahuldamisel [Berezovski, Maugin, 2004]. Esitatud on tingimused mahus ja faasipiiridel, kus toimub entroopia lisandumine, ning määratud jõu kriitiline väärtus faasipiiril [Berezovski, Maugin, 2005a].



Joonis 1.
Laine ja austeniitses keskkonnas asuva martensiitse tera (inklusiooni) vastastikmõju (interaktsiooni) simulatsioon. Algselt oli martensiitne tera ringikujuline ning talle langes vasakult poolt pingelaine. Kuna lained martensiidis levivad aeglasemalt kui austeniidis, siis toimuvad martensiitse ja austeniitse ala piiril faasimuutused, mille tulemusena muutub ka martensiitse tera kuju.

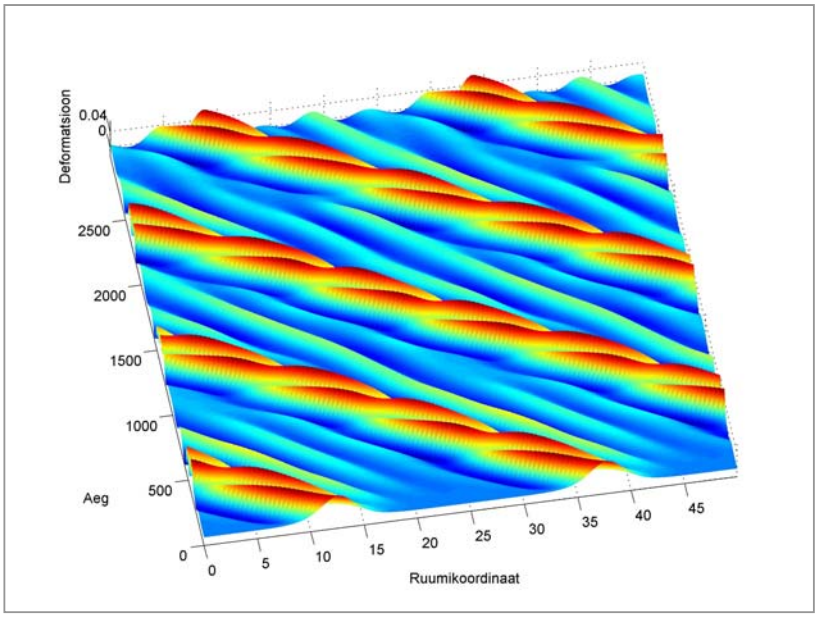
Termodünaamiliselt korrektne algoritm võimaldab lahendada mitmeid probleeme [Berezovski jt, 2000, 2003a, 2006; Berezovski, Maugin, 2001], seda ka mitmemõõtmelises seades, ning lubab üldistusi ka pragude arenemise modelleerimisel. Seejuures on kasutatud faasisiirdefrontide kui katkevuste põhimõttelist sarnasust ruumikatkevustega, st pragudega.

Üldistusel on aga sügavam teoreetiline tagapõhi – nimelt mõlemal juhul on vaja lisatingimusi täiendavate jõudude määramiseks, mis tuletatakse termodünaamika seaduste abil. Tööde tsükli “Faasisiirdefrondid martensiitsetes tahkistes” eest pälvis Arkadi Berezovski 2004. aastal Eesti Vabariigi teaduspreemia tehnikateaduste alal [Berezovski, 2004].

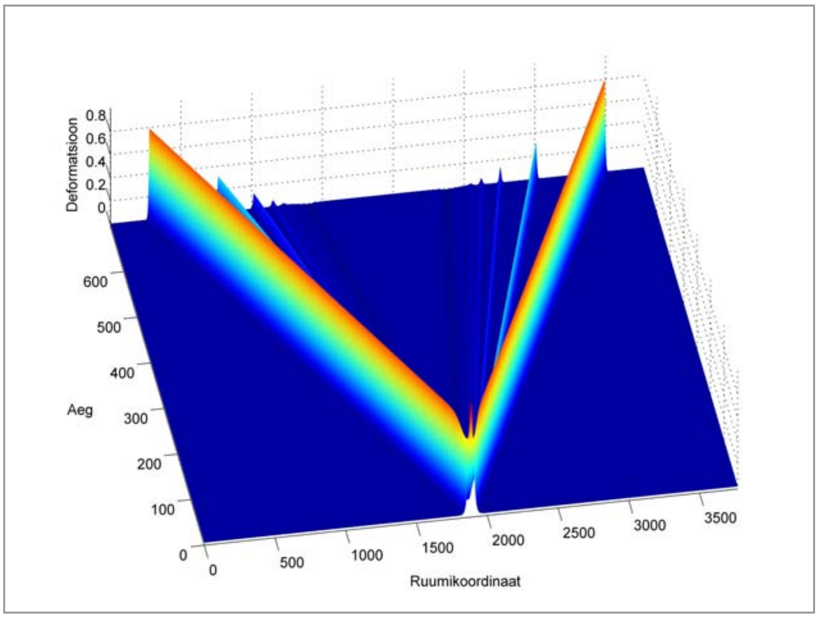
TULEMUSI

- On esitatud multimastaapsust arvestav matemaatiline mudel lainelevi kirjeldamiseks mikrostruktuursetes materjalides. Dispersioonianalüüs lubab hinnata asümptootiliste mudelite kasutusala [Engelbrecht jt, 2005; Janno, Engelbrecht, 2005a; Randrüüt, 2006; Peets, 2006].
- Numbriliste eksperimentide abil on analüüsitud lokaliseeritud häirituse levi mikrostruktuursetes tahkistes ja granuleeritud materjalides. Sel eesmärgil on integreeritud numbriliselt vastavad evolutsioonivõrrandid (2) ja (3). On selgitatud kuidas materjaliparameetrite väärtused ning häirituse amplituud ja iseloom mõjutavad lahendi iseloomu. Tulemusena on näidatud, millisel juhul on tegu solitoni-tüüpi lahenditega ja millisel juhul mitte.
  - ✓ Mikrostruktuursete materjalide korral on tuvastatud, et lokaliseeritud alghäiritusest võib välja kujuneda viis erinevat lahenditüüpi: mitteregulaarne lainete jada; regulaarne lainete jada; “palmiksolitonid”; kaks üksiklainet; üks üksiklaine [Ilison Salupere, 2003a, 2005, 2006; Salupere jt, 2005; Ilison, 2005].
  - ✓ Granuleeritud materjalide korral on uuritud nii harmooniliste kui lokaliseeritud alghäirituse juhtu. Harmoonilise algtingimuse korral oli kõige huvitavamaks tulemuseks kahe solitonilise struktuuri – KdV solitonide ansambli ja võrdsete amplituudidega üksiklainete ansambli – samaaegne eksisteerimine [Ilison, Salupere, 2003a; Salupere jt, 2005]. Lokaliseeritud alghäirituse korral on tuvastatud viis erinevat lahenditüüpi: üksik KdV soliton; KdV solitonide ansambel; KdV solitonide ansambel koos nõrga sabaga; KdV soliton koos tugeva sabaga; KdV soliton koos saba ja lainepaketiga.
- On näidatud, et KdV mudeli korral on osadel solitonidel faasinihked paremale ja vasakule tasakaalus ning seetõttu on vastavad trajektoorid lähedased sirgjoontele. Nendest nn balanseeritud trajektooridest moodustub perioodiline muster, mis on stabiilne üle väga pikkade ajavahemike [Salupere jt, 2002, 2003ab; Engelbrecht, Salupere, 2005].
- Erinevalt nn KdV tüüpi mudelitest, võimaldab Mindlin tüüpi mudel (1) simuleerida paremale ja vasakule liikuvate lainete omavahelist interaktsiooni. Esialgsete numbriliste eksperimentide tulemused näitavad, et teatavate parameetrite kombinatsioonide korral on lokaliseeritud algtingimustest formeeruvate üksiklainete käitumine interaktsioonil väga lähedane solitonide vastavale käitumisele. Lisaks selgus, et vastassuunas liikuvate võrdse amplituudiga solitonide interaktsioon toimub ilma faasinihketa, kuid erinevate amplituudide korral faasinihe esineb.
- On lahendatud teoreetiliselt rida pöördülesandeid, mis on aluseks materjali füüsikaliste omaduste määramiseks (akustodiagnostika algoritmid) [Janno, Engelbrecht, 2005bc]. On tuletatud kineetiline seos liikuva katkevuse kiiruse määramiseks. See tuleneb mittetasakaalulisest hüppetingimusest katkevusel, mis on formuleeritud kontaktsuuruste ning entroopia kasvu terminites. On näidatud, et lihtne oletus kontaktpingete pidevusest võimaldab määrata pingehüppe katkevusel ning tuletada vastavad kineetilised seosed [Berezovski, Maugin, 2005b]. Saadud kineetilist seost on edukalt rakendatud

Joonis 2.
Palmiksolitoni tekkimine algsest lokaliseeritud deformatsioonilainest KdV tüüpi mudeli (2) korral. Numbriline simulatsioon on läbi viidud perioodilistel rajatingimustel ning parema ülevaate saamiseks on joonisel kujutatud kahte ruumiperioodi. Joonisel esitatud koherentsest struktuurist eristub selgelt kahest omavahel interakteeruvast üksiklainest moodustunud palmiksoliton. Kuna vaadeldaval juhul on üksiklainete käitumine interaktsioonidel väga lähedane solitonide vastavale käitumisele, siis võib selline struktuurielement eksisteerida suhteliselt pika ajavahemiku jooksul.



Joonis 3.
Kahe vastassuunas liikuva solitonide jada tekkimine algsest lokaliseeritud deformatsioonilainest Mindlini tüüpi mudeli (1) korral. Mõlemas jadas on viis solitoni, mille järel on võimalik eristada jada suhtes vastassuunas liikuvat ostsilleeruvat saba.



hapra prao leviku puhul. Sellel juhul on tekitatud jõud proportsionaalne prao tipust vabaneva energia määraga. Energia eraldumise määr on arvutatud dünaamilise J-integraali määramispiirkonna esitamise kaudu. Prao levi numbrilised simulatsioonid näitavad head ühildumist meie käsutuses olevate eksperimentaalsete andmetega.

- Löökkoormusest põhjustatud faasiülemineku frondi levi numbrilised simulatsioonid ühemõõtmelises vardas lubavad selgitada kujumäluga sulamite Ni-Ti deformatsiooni vähenemist martensiitse faasiülemineku tõttu [Berezovski, Maugin, 2005a].

- Mittelineaarse ühemõõtmelise lainelevi numbrilised simulatsioonid kihilistes mittehomogeensetes keskkondades näitavad, et eksperimentaalselt jälgitud kihiliste komposiitide reageerimist suure kiirusega löökkoormusele saab esitada nende koostisosade mittelineaarsete pinge-deformatsiooni seoste abil [Berezovski jt, 2006].

Uuringute jätk on seotud sisemuutujate formalismi arendamisega multimastaapsete mikrostruktuursete materjalide kirjeldamiseks, eesmärgiga tuletada dissipatsiooni ja termilisi efekte arvestavad mudelid.

Tähelepanu all on solitoni-tüüpi struktuuride tekke selgitamine keeruliste dispersiooniseaduste ja mittelineaarsuste kombinatsioonil, mille siht on nii pingeanalüüs kui ka pöördülesannete lahendusmeetodite väljatöötamine.

Teoreetilisest vaatepunktist tundub endiselt põnevana solitonijadade tekkemehhanismi analüüs, mille jaoks on välja töötatud matemaatilised mudelid ja lahendusmeetodid.

VIITED

Berezovski, A. 2004. Muutuvate omadustega materjalid. Eesti Vabariigi teaduspreemiad, Eesti Teaduste Akadeemia, Tallinn, 48-57.

Berezovski, A., Berezovski, M., Engelbrecht, J. 2006. Numerical simulation of nonlinear elastic wave propagation in piecewise homogeneous media. Mater. Sci. Engng. A, 418, 1–2, 364-369.

Berezovski, A., Engelbrecht, J., Maugin, G. A. 2000. Thermoelastic wave propagation in inhomogeneous media. Arch. Applied Mech., 70, 694-706.

Berezovski, A., Engelbrecht, J., Maugin, G. A. 2003. Numerical simulation of two-dimensional wave propagation in functionally graded materials. Eur. J. Mech. Solids, 28/4, 299-313.

Berezovski, A., Maugin, G. A. 2001. Simulation of thermoelastic wave propagation by means of a composite wave-propagation algorithm. J. Comp. Physics, 168, 1, 249-264.

Berezovski, A., Maugin, G. A. 2004. On the thermodynamic conditions at moving phase-transition fronts in thermoelastic solids. J. Non-Equilib. Thermodynamics, 29, 37-51.

Berezovski, A., Maugin, G. A. 2005a. Stress-induced phase-transition front propagation in thermoelastic solids. Eur. J. Mec. A/Solids, 24, 1, 1-21.

Berezovski, A., Maugin, G. A. 2005b. On the velocity of moving singularities in solids. Acta Mechanica, 179/3-4, 187-196.

Engelbrecht, J., Berezovski, A., Pastrone, F., Braun, M. 2005. Waves in microstructured solids and dispersion. Phil. Mag., 85, 33-35, 4127-4141.

Engelbrecht, J., Berezovski, A., Pastrone, F., Braun, M. 2006. Hierarchies of waves in non-classical materials. Delsanto, P.-P. (ed.). The Universality of Non-Classical Non-Linearity with Applications to NDE and Ultrasonics, Springer, New York et al., 29-48.

Engelbrecht, J., Pastrone, F. 2003. Waves in microstructured solids with strong nonlinearities in microscale. Proc. Estonian Acad. Sci. Phys. Math., 52, 12-20.

Engelbrecht, J., Salupere, A. 2005. On the problem of periodicity and hidden solitons for the KdV model. Chaos, 15, 015114.

Eringen, A. C. 1966. Linear theory of micropolar elasticity. J. Math. Mech., 12, 909-923.

Eringen, A. C. 1999. Microcontinuum Field Theories. I Foundations and Solids. Springer, New York.

Giovine, P., Oliveri, F. 1995. Dynamics and wave propagation in dilatant granular materials. Meccanica, 30, 341-357.

Ilison, O. 2005. Solitons and solitary waves in media with higher order dispersive and nonlinear effects. PhD Thesis, Tallinn University of Technology.

Ilison, O., Salupere, A. 2003a. On formation of solitons in media with higher order dispersive effects. Proc. Estonian Acad. Sci. Phys. Math., 52, 1, 125-134.

Ilison, L., Salupere, A. 2003b. Solitons in hierarchical Korteweg-de Vries type systems. Proc. Estonian Acad. Sci. Phys. Math., 52, 1, 135-144.

Ilison, O., Salupere, A. 2005. Propagation of sech^2-type solitary waves in higher order KdV-type systems. Chaos, Solitons & Fractals, 26, 2, 453-465.

Ilison, O., Salupere, A. 2006. On the propagation of solitary pulses in microstructured materials. Chaos, Solitons & Fractals, 29, 202-214.

Janno, J., Engelbrecht, J. 2005a. Solitary waves in nonlinear microstructured materials. J. Phys. A: Math. Gen., 38, 23, 5159-5172.

Janno, J., Engelbrecht J. 2005b. Waves in microstructured solids. Inverse problems. Wave Motion, 43, 1-11.

Janno, J., Engelbrecht, J. 2005c. An inverse solitary wave problem related to microstructured materials. Inverse Problems, 21, 2019-2034.

Maugin, G. A. 1990. Internal variables and dissipative structures. J. Non-Equilib. Thermodyn., 15, 173-192.

Maugin, G. A. 1993. Material Inhomogeneities in Elasticity, London, Chapman & Hall.

Maugin, G. A. 1999. Nonlinear Waves in Elastic Crystals, Oxford, Oxford University Press.

Mindlin, R. D. 1964. Micro-structure in linear elasticity. Arch. Rat. Mech. Anal., 16, 51-78.

Peets, T. 2006. Dispersion in microstructured materials. MSc Thesis, Tallinn University of Technology.

Randrüüt, M. 2006. Modelling of deformation waves in microstructured solids. MSc Thesis, Tallinn University of Technology.

Salupere, A., Engelbrecht, J., Ilison, O., Ilison, L. 2005. On solitons in microstructured solids and granular materials. Mathematics and Computers in Simulation, 69, 502-513.

Salupere, A., Engelbrecht, J., Maugin, G. A. 2001. Solitonic structures in KdV-based higher-order systems. Wave Motion, 34, 51-61.

Salupere, A., Engelbrecht, J., Peterson, P. 2003a. On the long-time behaviour of soliton ensembles. Mathematics and Computers in Simulation, 62, 137-147.

Salupere, A., Peterson, P., Engelbrecht, J. 2002. Long-time behaviour of soliton ensembles. Part I, Emergence of ensembles. Chaos, Solitons & Fractals, 14, 1413-1424.

Salupere, A., Peterson, P., Engelbrecht, J. 2003b. Long-time behaviour of soliton ensembles. Part II, Periodical patterns of trajectories. Chaos, Solitons & Fractals, 15, 29-44.

Sillat, T., Engelbrecht, J. 2003. Wave propagation in dissipative microstructured materials. Proc. Estonian Acad. Sci. Phys. Math., 52, 103-114.

Tamm, K. 2006. Deformatsioonilainete interaktsioonid mikrostruktuursetes tahkistes. MSc Thesis, Tallinn University of Technology.

Whitham, G. B. 1974. Linear and Nonlinear Waves, New York, J.Wiley.

Zabusky, N. J., Kruskal, M. D. 1965. Interaction of solitons in a collisionless plasma and the recurrence of initial states. Phys. Rev. Lett., 15, 240-243.